

## Einführung Variable, Term und Gleichung

## Lösungen

## 1. Grundbegriffe

## Die Variable

Die Variable ist der Name für eine Leerstelle in einem mathematischen Ausdruck. Der Begriff leitet sich aus dem lateinischen Adjektiv *variabilis* (veränderlich) ab. Die Variable wird oft auch Platzhalter, Unbekannte oder Veränderliche genannt.

Beispiele:	$5 + 15 = 20$	$3 \cdot 16 = 48$
	$25 + \Delta = 53 \quad \rightarrow \Delta = 28$	$\square : 10 + 7 = 10 \quad \rightarrow \square = 30$
	$29 - x = 12 \quad \rightarrow x = 17$	$60 : y = 10 \quad \rightarrow y = 6$
	$3a = 36 \quad \rightarrow a = 12$	$5b - 13 = 12 \quad \rightarrow b = 5$

## Der Term

In der Mathematik ist ein Term eine sinnvolle Verknüpfung, die Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern enthalten kann. Terme müssen korrekt „geschrieben“ sein. Sie bilden die mathematisch, formale Sprache der Algebra.

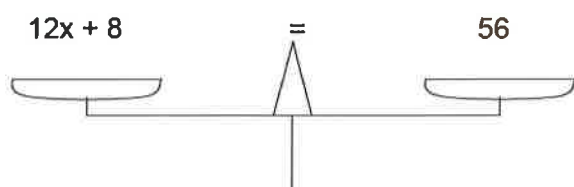
Beispiele:	$5x + 12$	$5a + 4b + 3c + 2d + e$
	$3(x + 4)$	$10 - (8a + 6b - 4c)$

Im Kapitel 2 werden wir Terme umformen. Das Ziel ist es jeweils, die Terme so weit wie möglich zu vereinfachen. Dazu müssen wir gleiche Variablen zusammenfassen.

## Die Gleichung

Unter einer Gleichung versteht man in der Mathematik eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme. Dies wird mit Hilfe des Gleichheitszeichens „=“ symbolisiert. Formal hat die Gleichung die Gestalt  $T_1 = T_2$ .

Beispiel:



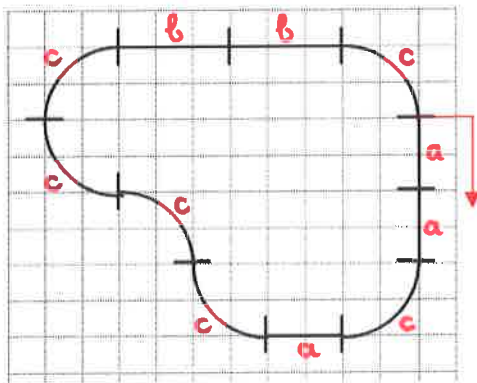
Eine Gleichung muss immer wie eine Waage im Gleichgewicht sein... 😊

Welche Zahl muss man für die Variable  $x$  einsetzen, damit die Waage im Gleichgewicht bleibt?

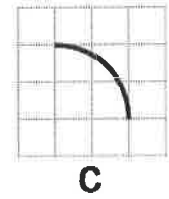
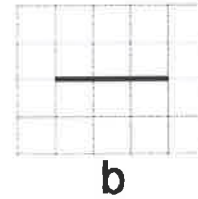
$x = 4$  ...weil  $12 \text{ mal } 4 + 8 = 56$  ist!

## 2. Terme umformen

Einführungsbeispiel mit Linien



Drei verschiedene „Elemente“ für den Zaun!



Damit du den gesamten Umfang dieser Figur ausrechnen kannst, musst du zuerst die Teilstücke addieren. Danach musst du die Teilstücke sortieren. Man sagt dann auch „den Term umformen“.

$$u = a + a + c + a + c + c + c + c + b + b + c$$

$$u = 3a + 2b + 6c$$

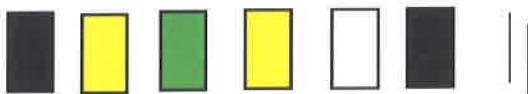
Einführungsbeispiel mit „Boxen“

Unsere Boxen stellen wir als farbige Rechtecke dar.

Wir legen fest: a = weiße Box → steht für die Zahl 1 (1 Zündhölzchen)  
 b = gelbe Box → steht für die Zahl 2 (2 Zündhölzchen)  
 c = grüne Box → steht für die Zahl 3 (3 Zündhölzchen)  
 d = schwarze Box → steht für die Zahl 4 (4 Zündhölzchen)

- Aufgabe:
1. Ordne die Boxen in alphabetischer Reihenfolge. Gleiche Boxen stehen nebeneinander. D.h. zuerst die a-Boxen, dann die b-Boxen, usw.
  2. Rechne aus, wie viele Hölzchen für den gesamten Term verwendet werden. Notiere unter der geordneten Boxendarstellung die Zündhölzchen mit „Jass-Strichen“!
  3. Notiere jeweils rechts den passenden mathematischen Term.

Boxenanordnung







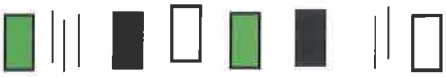
Mathematischer Term

$$d + b + c + b + a + d + 2$$

$$a + 2b + c + 2d + 2$$





$$1 + 2 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 4 + 2 = 18$$

### 3. Übungsblatt zu Boxen und Termen



Boxenanordnung	Mathematischer Term
<p>1</p> 	$b + d + c + d + a + c + 2$ $a + b + 2c + 2d + 2$ $1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 = \underline{19}$
<p>2</p> 	$c + 4 + d + c + a + c + a$ $2a + 3c + d + 4$ $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 + 4 = \underline{19}$
<p>3</p> 	$d + c + c + d + a + c + 5$ $a + 3c + 2d + 5$ $1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 = \underline{23}$
<p>4</p> 	$b + a + b + d + 4 + a + a + b$ $3a + 3b + d + 4$ $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 + 4 = \underline{17}$
<p>5</p> 	$c + 3 + d + a + c + d + 2 + a$ $2a + 2c + 2d + 5$ $2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 = \underline{21}$

#### 4. Mit Figurenfolgen Terme bestimmen





a. Hilfsmittel sind Zündhölzchen – es geht um die Anzahl Hölzchen

Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4
			

Wertetabelle						Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 10	Figur x
Anzahl Hölzchen	1	3	5	7		$2x - 1$

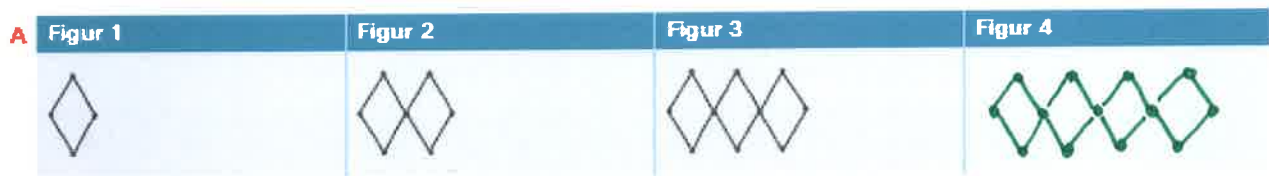
Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4
			

Wertetabelle						Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 10	Figur x
Anzahl Hölzchen	5	9	13	17	41	$4 \cdot x + 1$

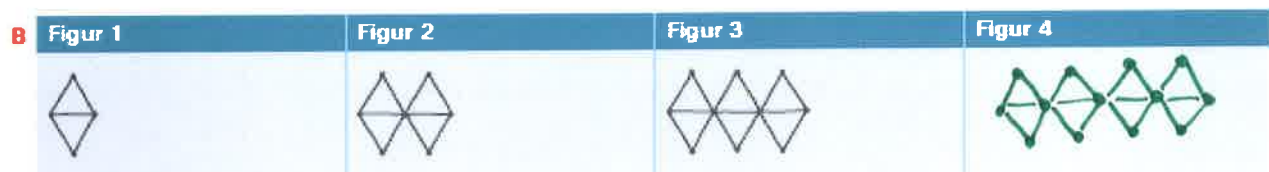
Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4
			

Wertetabelle						Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 10	Figur x
Anzahl Hölzchen	1	5	9	13	37	$4 \cdot x - 3$

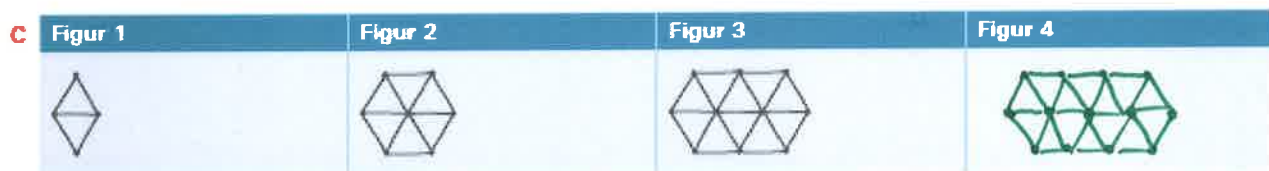
b. Hilfsmittel sind Zündhölzchen – es geht um die Anzahl Hölzchen, die Punkte, die Flächen



Wertetabelle							Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 10	Figur 100	Figur x
Anzahl Hölzchen	4	8	12	16	40	400	$4 \cdot x$
Anzahl Punkte	4	7	10	13	31	301	$3 \cdot x + 1$
Anzahl Innenflächen	1	2	3	4	10	100	x



Wertetabelle							Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 10	Figur 100	Figur x
Anzahl Hölzchen	5	10	15	20	50	500	$5 \cdot x$
Anzahl Punkte	4	7	10	13	31	301	$3x + 1$
Anzahl Innenflächen	2	4	6	8	20	200	$2 \cdot x$



Wertetabelle							Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 10	Figur 100	Figur x
Anzahl Hölzchen	5	12	19	26	68	698	$7 \cdot x - 2$
Anzahl Punkte	4	7	10	13	31	301	$3x + 1$
Anzahl Innenflächen	2	6	10	14	38	398	$4 \cdot x - 2$

c. Hilfsmittel sind kleine Würfel – es geht um die sichtbaren und unsichtbaren Flächen



Wertetabelle							Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 8	Figur 10	Figur x
Anzahl Würfel	2	4	6	8	16	20	$2 \cdot x$
Anzahl aller Würfelflächen	12	24	36	48	96	120	$12 \cdot x$
Anzahl sichtbarer Würfelflächen	8	14	20	26	50	62	$6 \cdot x + 2$
Anzahl unsichtbarer Würfelflächen	4	10	16	22	46	58	$6 \cdot x - 2$



Wertetabelle							Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 8	Figur 10	Figur x
Anzahl Würfel	4	8	12	16	32	40	$4 \cdot x$
Anzahl aller Würfelflächen	24	48	72	96	192	240	$24 \cdot x$
Anzahl sichtbarer Würfelflächen	14	20	26	32	56	68	$6 \cdot x + 8$
Anzahl unsichtbarer Würfelflächen	10	28	46	64	136	172	$18 \cdot x - 8$



Wertetabelle							Term
	Figur 1	Figur 2	Figur 3	Figur 4	Figur 8	Figur 10	Figur x
Anzahl Würfel	6	12	18	24	48	60	$6 \cdot x$
Anzahl aller Würfelflächen	36	72	108	144	288	360	$36 \cdot x$
Anzahl sichtbarer Würfelflächen	18	32	46	60	116	144	$14 \cdot x + 4$
Anzahl unsichtbarer Würfelflächen	18	40	62	84	172	216	$22 \cdot x - 4$

## 5. Mit Zahlenfolgen Terme bestimmen

Merke:  $x$  und  $y$  sind Variablen. Kann eine dieser Variablen mit der andere berechnet werden, so wird der „Rechnungsweg“ (was wir eben im Kopf rechnen...) als mathematischer Term notiert. Man kann den Term auch als Formel oder Gleichung bezeichnen! Diese ersten Erfahrungen mit Buchstaben – in der Mathematik – ist der Startschuss in die ALGEBRA.

a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	x
y	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60		3x

b.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	x
y	-	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	78		4x - 2

c.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	x
y	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	43		2x + 3

d.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	x
y	-	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	99		5x - 1

e.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	x
y	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	401		x · x + 1

f.

x	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	140	...	7y
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	y

g.

x	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	25	...	y + 5
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	y

h.

x	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	43	...	2y + 3
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	y

i.

x	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	420	...	y · (y+1)
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	y

*oder  $y^2 + y$*

## 6. Verschiedene Möglichkeiten der Darstellung

### a. Einfache Zahlenfolge

Merke: Zahlenfolgen beschreiben sehr oft ganz typische alltägliche Rechnungsbeispiele!  
Zahlenfolgen werden in sogenannten Wertetabellen notiert. Dies ist eine mögliche Darstellungsform.

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	...	x
y	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60		3x

Gleichungen:

$$y = 3x \quad \text{oder} \quad x = y : 3$$

Text 1:

y ist gleich gross wie das Dreifache von x.

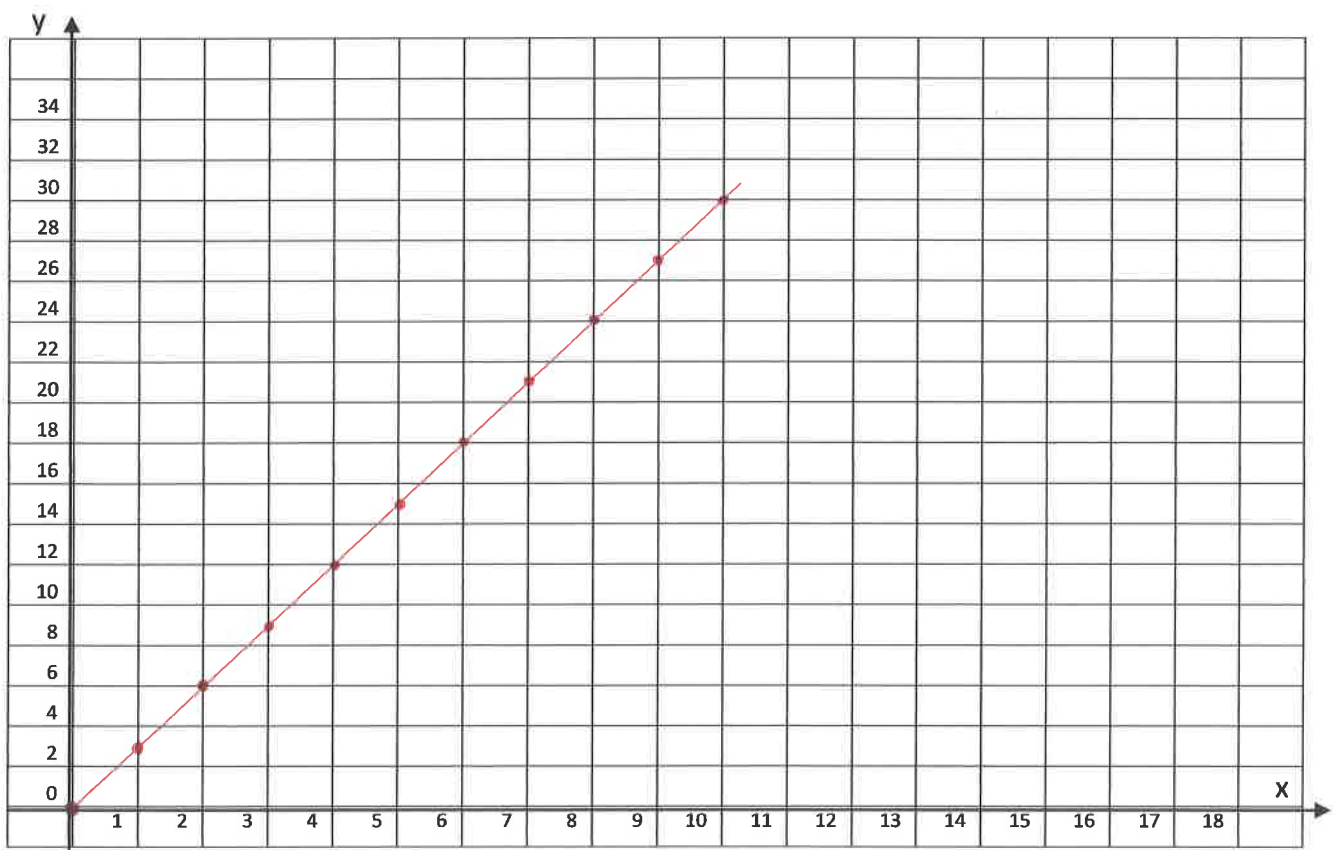
.....

Text 2:

x ist ein Drittel mal so gross wie y.

.....

Koordinatensystem:





b. Anwendungsbeispiel: Taxitarife in der Stadt Zürich

Ausgangslage: In der Stadt und Agglomeration Zürich werden die Tarife (Preise) für eine Taxifahrt folgendermassen berechnet: Grundgebühr Fr. 8.-, Fr. 5.- / km  
Wie hängen also die zurückgelegten Kilometer mit der Preis zusammen?

Wertetabelle:

x	[km]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	...	x
y	[Fr.]	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	83		$5x + 8$

Gleichungen:

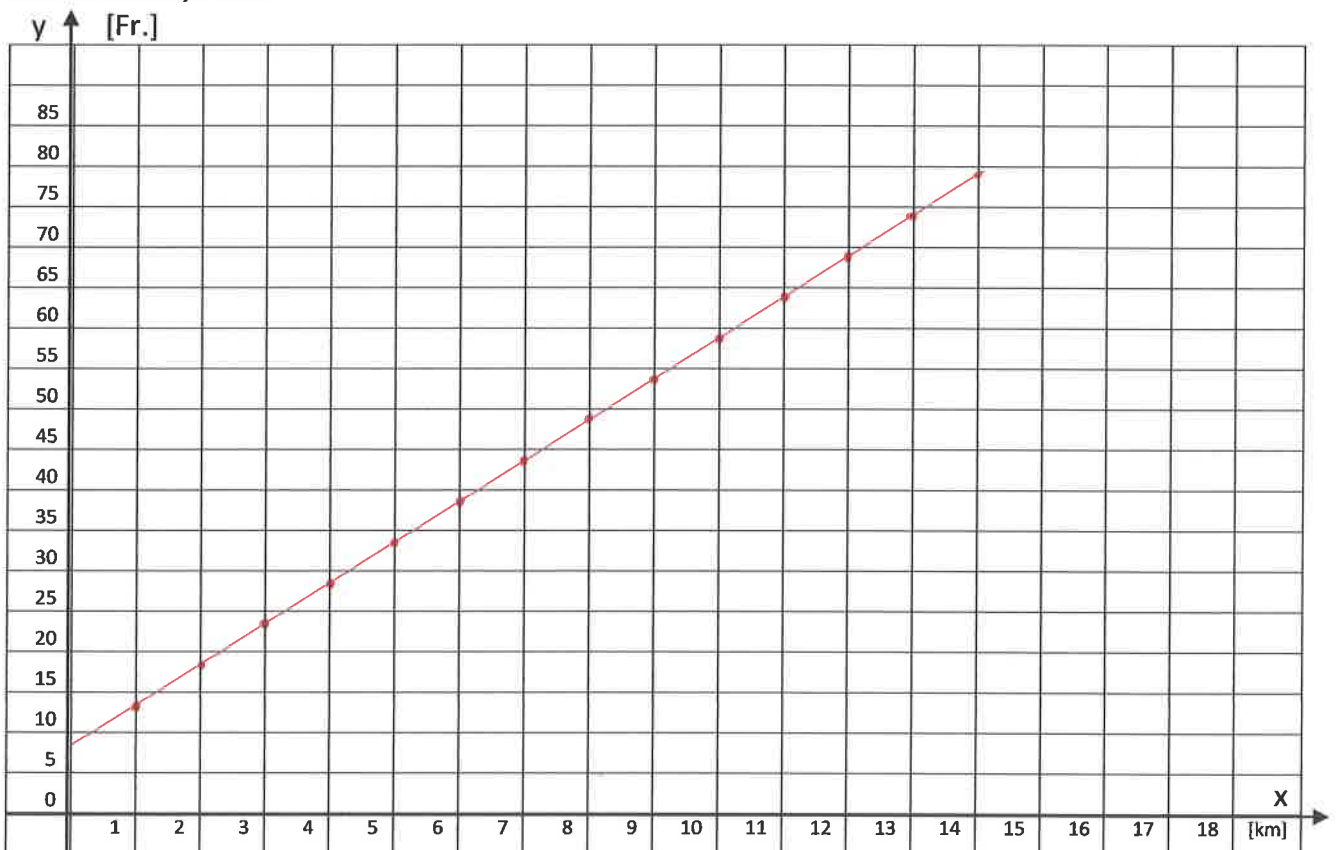
$$y \text{ [Fr.]} = 5 \cdot x \text{ [km]} + 8$$

Text:

Vergössert man das Fünffache der Anzahl Kilometer um 8, so erhält man den Preis für die Taxifahrt.

---

Koordinatensystem:



## 7. Von der Boxenanordnung zu Text, Gleichung und Wertetabelle

- Hilfsmittel:
- dunkle, rote y-Boxen
  - helle, blaue x-Boxen
  - Zündhölzchen

Beschreibe die Boxenanordnung in Worten, erstelle die Wertetabelle und gib eine passende Gleichung an.

### A Boxenanordnung



Text

In zwei dunklen Boxen sind zwei Hölzchen mehr als in einer dunklen Box.

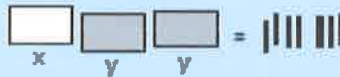
Gleichung

$$y + 2 = 2y$$

Wertetabelle nur eine Lösung

x	-						
y	2						

### B Boxenanordnung



Text

In einer hellen und zwei dunklen Boxen liegen insgesamt sieben Hölzchen.

Gleichung

$$x + 2y = 7$$

Wertetabelle nur vier Lösungen

x	1	3	5	7			
y	3	2	1	0			

### C Boxenanordnung



Text

In einer hellen und einer dunklen Box liegt insgesamt ein Hölzchen mehr als in einer dunklen Box.

Gleichung

$$x + y = y + 1$$

Wertetabelle unendlich viele Lösung

x	1	1	1	1	1	1	1
y	1	2	3	4	5	6	7

### D Boxenanordnung



Text

In vier dunklen Boxen liegen insgesamt zwei Hölzchen mehr als in zwei hellen Boxen.

Gleichung



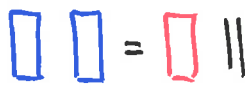
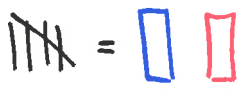


$$2x + 2 = 4y$$

Wertetabelle unendlich viele Lösung

x	1	3	5	7	9	11	13
y	1	2	3	4	5	6	7

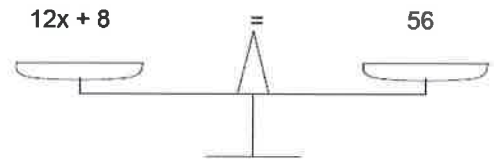
## 8. Von der Gleichung zur Boxenanordnung, dem Text und der Wertetabelle

Hilfsmittel: - dunkle oder rote y-Boxen  
 - helle oder blaue x-Boxen  
 - Zündhölzchen

Gleichung	Boxenanordnung	Text	Wertetabelle
1 $2 \cdot x + 2 = y$		ADDIERT MAN ZUM DOPPELTEN VON X DIE ZAHL 2, SO BEKOMMT MAN Y.	$\begin{array}{c cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline y & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \end{array}$
2 $2 \cdot y + 2 = x$		VERDOPPELT MAN ZWEI Y-BOXEN UM 2, SO ERHÄLT MAN EINE X-BOX.	$\begin{array}{c cccc} x & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \\ \hline y & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array}$
3 $2 \cdot x = y + 2$		ZÄHLT MAN ZU Y DIE ZAHL 2, SO ERHÄLT MAN DAS DOPPELTE VON X.	$\begin{array}{c cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline y & 0 & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array}$
4 $5 = x + y$		X UND Y SIND ZUSAMMEN 5.	$\begin{array}{c ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$
5 $2 \cdot x + y = 2 \cdot y$		ZWEI X UND EIN Y SIND GLEICH GROSS WIE 2y. y IST DOPPELT SO GROSS WIE X.	$\begin{array}{c cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline y & 0 & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array}$
6 $3 \cdot x + 2 = y$		ADDIERT MAN ZUM DREIFACHEN VON X 2, SO BEKOMMT MAN Y.	$\begin{array}{c cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline y & 2 & 5 & 8 & 11 & \dots \end{array}$

### 9. Boxenanordnungen oder Gleichungen vereinfachen und die Lösung(en) bestimmen

- Merke:
- Die Waage muss im Gleichgewicht bleiben!
  - Du kannst beidseitig mit der gleichen Zahl...  
...addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren



Boxenanordnung	Gleichung												
<p>①</p>	$3x + 1 = x + 5 \quad   -x$ $2x + 1 = 5 \quad   -1$ $2x = 4 \quad   :2$ $\underline{x = 2}$												
<p>②</p>	$2y + 5 = y + 13 \quad   -y$ $y + 5 = 13 \quad   -5$ $\underline{y = 8}$												
<p>③</p>	$5y + x + 8 = y + 2x \quad   -y - x$ $4y + 8 = x$ <p>Lösungen:</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid red; padding: 0 5px; text-align: center;">x</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">8</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">12</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">16</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">20</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">...</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid red; padding: 0 5px; text-align: center;">y</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">1</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">2</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">3</td> <td style="padding: 0 5px; text-align: center;">...</td> </tr> </table>	x	8	12	16	20	...	y	0	1	2	3	...
x	8	12	16	20	...								
y	0	1	2	3	...								

Bestimme für die Variable jeweils die richtige Zahl (Lösung der Gleichung), indem du die Gleichung sorgfältig und korrekt auflöst und das Resultat doppelt rot unterstreichst!

- Beachte:
1. Auf beiden Seiten den Term so weit wie möglich zusammenfassen.
  2. Variable (Boxen) auflösen, sodass es nur noch auf einer Seite hat...
  3. Zahlen (Hölzchen) auf die andere Seite (vis à vis) der Variablen verschieben...
  4. Den „Wert“ von einer Box, einem  $x$ , ausrechnen! ☺

<p>1</p> $x + 12 = 17 \quad   -12$ $\underline{x = 5}$	<p>2</p> $56 = x + 38 \quad   -38$ $\underline{18 = x}$
<p>3</p> $5x + 24 = 3x + 28 \quad   -3x$ $2x + 24 = 28 \quad   -24$ $2x = 4 \quad   :2$ $\underline{x = 2}$	<p>4</p> $x + 2x + 5 + 8 + 4x = 55 \quad   \text{TV}$ $7x + 13 = 55 \quad   -13$ $7x = 42 \quad   :7$ $\underline{x = 6}$
<p>5</p> $5x - 15 - 3x = 7x + 5x - 35 \quad   \text{TV}$ $2x - 15 = 12x - 35 \quad   -2x$ $-15 = 10x - 35 \quad   +35$ $20 = 10x \quad   :10$ $\underline{2 = x}$	<p>6</p> $y - 1 - y + 6y - 36 + 6y = 11 \quad   \text{TV}$ $12y - 37 = 11 \quad   +37$ $12y = 48 \quad   :12$ $\underline{y = 4}$
<p>7</p> $3x - 16 + 5x + 21 - x = 47 \quad   \text{TV}$ $7x + 5 = 47 \quad   -5$ $7x = 42 \quad   :7$ $\underline{x = 6}$	<p>8</p> $58 - 3x = 37 \quad   +3x$ $58 = 37 + 3x \quad   -37$ $21 = 3x \quad   :3$ $\underline{7 = x}$
<p>9</p> $6x + 64 - 4x - 75 = 55 - 9x \quad   \text{TV}$ $2x - 11 = 55 - 9x \quad   +9x$ $11x - 11 = 55 \quad   +11$ $11x = 66 \quad   :11$ $\underline{x = 6}$	<p>10</p> $42 - y = 9y - 8 \quad   +y$ $42 = 10y - 8 \quad   +8$ $50 = 10y \quad   :10$ $\underline{5 = y}$

## 10. Zum Abschluss verbinden wir: Texte – Wertetabellen – Gleichungen

### a. Text und Wertetabelle verbinden

Ordne die Texte den Wertetabellen zu. Zu jeder Wertetabelle gehören zwei Texte.

- A In der hellen Box liegen halb so viele Hölzchen wie in der dunklen.
- B In der hellen Box liegen zwei Hölzchen weniger als in der dunklen Box.
- C In der dunklen Box liegen halb so viele Hölzchen wie in der hellen.
- D In der dunklen Box liegen zwei Hölzchen weniger als in der hellen.
- E In der hellen Box liegen doppelt so viele Hölzchen wie in der dunklen.
- F In der hellen Box liegen zwei Hölzchen mehr als in der dunklen.
- G In der dunklen Box liegen zwei Hölzchen mehr als in der hellen.
- H In der dunklen Box liegen doppelt so viele Hölzchen wie in der hellen.

Tabelle 1									
x	2	4	6	10	20	100	500	<u>E</u>	<u>C</u>
y	1	2	3	5	10	50	250		

Tabelle 2									
x	1	2	3	5	10	20	100	<u>B</u>	<u>G</u>
y	3	4	5	7	12	22	102		

Tabelle 3									
x	2	4	6	10	20	100	500	<u>A</u>	<u>H</u>
y	4	8	12	20	40	200	1000		

Tabelle 4									
x	3	4	5	7	12	22	102	<u>D</u>	<u>F</u>
y	1	2	3	5	10	20	100		

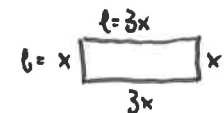
### b. Texte in die formale mathematische Sprache übersetzen → algebraische Gleichungen formulieren

Trix und Beni vergleichen die Anzahl ihrer gesammelten Karten.

Schreibe zu jedem Text eine passende Gleichung. Die Anzahl von Beni wird mit y beschrieben, die Anzahl von Trix mit x. Beachte die Regel Punkt vor Strich.

Text	Gleichung
A Trix hat drei Karten mehr als Beni.	$x = y + 3$
B Trix hat doppelt so viele wie Beni.	$x = 2y$
C Trix hat drei mehr als halb so viele wie Beni.	$x = \frac{y}{2} + 3$
D Trix hat zwei weniger als doppelt so viele wie Beni.	$x = 2y - 2$
E Trix hat zwei weniger als die Hälfte von Beni.	$x = \frac{y}{2} - 2$

c. Verschiedene Zahlenrätsel „entschlüsseln“: Gleichung notieren und auflösen...

<p>1 Wenn man vom Fünffachen einer Zahl 4 subtrahiert, so erhält man 26.</p>	$5x - 4 = 26 \quad   +4$ $5x = 30 \quad   :5$ $\underline{x = 6}$
<p>2 Das Dreifache einer Zahl ist genau gleich gross wie das Doppelte der Zahl vermehrt um 5.</p>	$3x = 2x + 5 \quad   -2x$ $\underline{x = 5}$
<p>3 Addiert man zum Dreifachen einer Zahl 2, so erhält man ebenso viel, als wenn man vom Fünffachen der Zahl 8 subtrahiert.</p>	$3x + 2 = 5x - 8 \quad   -3x$ $2 = 2x - 8 \quad   +8$ $10 = 2x \quad   :2$ $\underline{5 = x}$
<p>4 Subtrahiert man 45 vom Fünfzehnfachen einer Zahl, so erhält man 30. Um welche Zahl handelt es sich?</p>	$15x - 45 = 30 \quad   +45$ $15x = 75 \quad   :15$ $\underline{x = 5}$
<p>5 In einem Rechteck ist die Länge dreimal so gross wie die Breite. Der Umfang beträgt 120 cm. Wie gross sind Länge und Breite?</p>	 $2 \cdot 3x + 2 \cdot x = 120 \quad   :4$ $8x = 120 \quad   :8$ $x = 15 \quad \text{also: } \underline{45 \text{ cm} = l}$ $\underline{15 \text{ cm} = b}$

d. Übungen mit [www.lernareal.ch](http://www.lernareal.ch) (→ Mathematik, Kapitel 5 Gleichungen, Übungen 5.1 und 5.2)

<b>5 Gleichungen</b>			
1 Terme			
2 Gleichungen mit ganzen Zahlen			