
Kapitel 7: Gleichungen

1. Allgemeines

Gleichungen

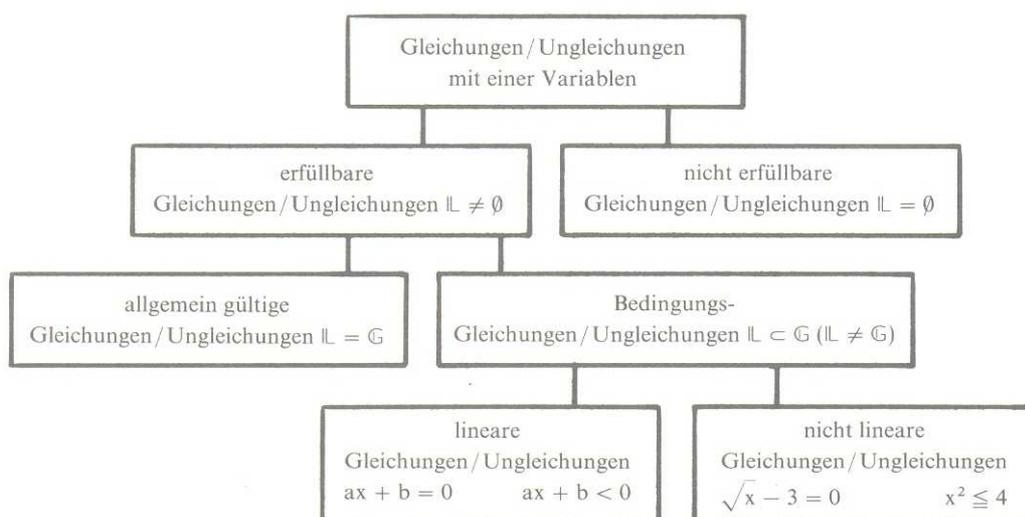
Setzt man zwischen zwei Terme T_1 und T_2 ein Gleichheitszeichen ($=$), so entsteht eine Gleichung!

Ungleichung

Setzt man zwischen zwei Terme T_1 und T_2 ein Ungleichheitszeichen ($<$, $>$, \neq , \leq , \geq), so entsteht eine Ungleichung!

Arten von Gleichungen und Ungleichungen

In diesem Diagramm (aus Holzherr/Ineichen, Bd.2) sind die wichtigsten Gleichungs-arten mit einer Variablen aufgeföhrt:



Lösungsmenge

Alle Einsetzungen für die Variable aus der Grundmenge G , die eine Gleichung zu einer wahren Aussage machen, bilden die Lösungsmenge L .

Äquivalenzumformungen

Gleichungen: Um bei einer Gleichung eine Variabel auf einer Seite zu isolieren, darf man:

1. auf beiden Seiten die gleiche Zahl oder Variable addieren bzw. subtrahieren.
2. auf beiden Seiten mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren bzw. dividieren.

Ungleichungen: Um bei einer Ungleichung eine Variable auf einer Seite zu isolieren, darf man:

1. auf beiden Seiten die gleiche Zahl oder Variable addieren bzw. subtrahieren.
2. auf beiden Seiten mit der gleichen positiven Zahl multiplizieren und dividieren.
3. auf beiden Seiten mit der gleichen negativen Zahl multiplizieren und das Ungleichheitszeichen drehen (kann man auch umgehen!).

Kapitel 7: Gleichungen

2. Algebraische Gleichungen

Wir lösen verschiedene Gleichungen:

a. Gleichung ohne Klammern

$$5x - 6 - 3x = 1 + 2x - 7$$

b. Gleichung mit Klammern

$$-(5 - 2x) = 14 - (14 - x)$$

c. Gleichung mit Klammern und Produkt (mit ganzer Zahl)

$$5(2 - 3x) + 6 = 9x - 5(3x - 14)$$

d. Gleichung mit Klammern und Produkt (von Summen)

$$(x - 5)(x - 2) = (x - 4)(x - 3) - 4$$

Kapitel 7: Gleichungen

e. Gleichung mit Klammern und Binomischer Formel

$$(15x - 3)^2 = x(225x + 6)$$

f. Gleichung mit Brüchen (im Nenner eine Zahl)

$$\frac{3x+8}{5} - \frac{7x-4}{8} = \frac{5x+12}{2}$$

1. GN bestimmen mit Primfaktorzerlegung:

g. Gleichung mit Brüchen (im Nenner eine Variable = Bruchterm \Rightarrow siehe 5.)

$$\frac{3-2x}{6x} - \frac{1+2x}{3x} = \frac{1}{x}$$

1. GN bestimmen mit Primfaktorzerlegung:

h. Ungleichung

$$x < 49 + 5(x + 5(x - 5(x + 5)))$$

Kapitel 7: Gleichungen

3. Die Umformung von Text in einen mathematischen Term!

Text	Mathematischer Term
Das Achtfache einer Zahl	
Der fünfte Teil einer Zahl	
Eine gesuchte Zahl wird um 13 vermehrt	
Der Nachfolger einer Zahl	
Der Vorgänger einer Zahl	
Die Summe aus dem Dreifachen einer Zahl und 45	
Die Differenz aus dem Zehnfachen einer Zahl und 15	
Der dritte Teil einer Zahl vermindert um 9	
Das Siebenfache der Differenz aus 5 und einer Zahl	
Das Produkt aus einer Zahl und 12	
Der Quotient aus dem Doppelten einer Zahl und 3	
Der Quotient aus einer Zahl und 20 wird um 2 vermehrt	
Die Differenz aus dem Nachfolger einer Zahl und 23	
Das Produkt aus der Summe einer Zahl und 3 und der Differenz dieser Zahl und 4	
Addiere zur Hälfte einer Zahl 7 hinzu	
Subtrahiere von einer gedachten Zahl 11 und multipliziere diese Differenz mit 3	
Die Summe aus dem Dreifachen und dem Siebenfachen einer Zahl	
Die Summe aus einer Zahl und ihrem Nachfolger ist 49.	
Das Vierfache einer Zahl wird um 4 vermindert. Nichts bleibt übrig.	
Das Sechsfache einer Zahl vermindert um 12 ist gleich dem Dreifachen dieser Zahl vermehrt um 18.	
Wenn man von einer Zahl 255 subtrahiert, so erhält man dasselbe, wie wenn man die Zahl durch 4 dividiert.	
Ich denke mir eine Zahl, multipliziere sie mit 2, addiere 2 und erhalte 17. Wie heisst die Zahl?	
Das Quadrat einer Zahl ist um 7 kleiner als das Quadrat der um 1 vergrößerten Zahl!?	

Kapitel 7: Gleichungen

4. Textaufgaben: Lösung in 4 Schritten

a. Zahlenrätsel

Wenn man das Dreifache einer Zahl von 60 subtrahiert, dann erhält man genau das Doppelte dieser Zahl! Um welche Zahl handelt es sich?

1. Variablendefinition:

2. Gleichung:

3. Lösung:

4. Kontrolle:

b. Geometrieaufgabe

Länge und Breite eines Rechtecks verhalten sich wie 2:1! Addiert man zur Breite 2 cm und subtrahiert man von der Länge 1 cm, so wird der Flächeninhalt um 4 cm^2 grösser! Wie gross sind Länge und Breite ursprünglich?

1. Variablendefinition:

2. Gleichung:

3. Lösung:

4. Kontrolle:

Kapitel 7: Gleichungen

c. Verteilungsaufgabe

Eine Geldsumme von 6600.- CHF muss so unter zwei Leuten aufgeteilt werden, dass A 20% mehr erhält als B. Wie gross sind die Anteile?

1. Variablendefinition:

2. Gleichung:

3. Lösung:

4. Kontrolle:

d. Altersaufgabe

Herr Müller ist heute 50 Jahre alt. Seine Tochter Nina ist 12. In wie vielen Jahren wird der Vater doppelt so alt sein wie seine Tochter?

1. Variablendefinition:

2. Gleichung:

3. Lösung:

4. Kontrolle:

Kapitel 7: Gleichungen

5. Bruchgleichungen

Bruchgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Variable im Nenner vorkommt, bezeichnen wir als Bruchgleichung!

Definitionsmenge

Die Definitionsmenge gibt an, welche Zahlen für die Variable eingesetzt werden dürfen. Die Schreibweise ist immer gleich! Achtung: Der Nenner darf NIE 0 werden!

Beispiel: $\frac{15-x}{x} + \frac{x}{x+7} = 39$ Definitionsmenge:

Lösungsmenge

Vorgehen bei der Bestimmung der Lösungsmenge L einer Bruchgleichung:

1. Man bestimmt den einfachsten gemeinsamen Nenner GN (kgV).
2. Man gibt die Definitionsmenge D der Bruchgleichung an.
3. Man multipliziert beide Seiten der Gleichung mit dem GN.
4. Man bestimmt die Lösung der Gleichung.
5. Man kontrolliert, ob diese Lösung auch die Bruchgleichung erfüllen und ob sie in der Definitionsmenge D enthalten sind.
6. Anschliessend notiert man die Lösungsmenge!

Beispiele

Wir machen nun ein paar Musterlösungen:

a. $\frac{x-1}{2x} - \frac{x+1}{x} = 2$

1. GN durch Primfaktorzerlegung:

2. Definitionsmenge:

6. Lösungsmenge:

b. $\frac{2x}{5x-15} - \frac{1}{3x-9} = \frac{1}{5}$

1. GN durch Primfaktorzerlegung:

2. Definitionsmenge:

6. Lösungsmenge:

Kapitel 7: Gleichungen

c. $\frac{3}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^2 - 3x - 10} = 0$

1. GN durch Primfaktorzerlegung:

2. Definitionsmenge:

6. Lösungsmenge:

d. $\frac{2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{x^2 + 6x + 9}$

1. GN durch Primfaktorzerlegung:

2. Definitionsmenge:

6. Lösungsmenge: