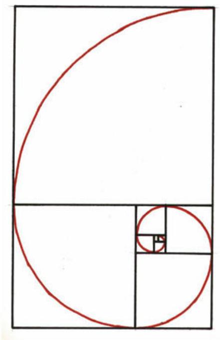
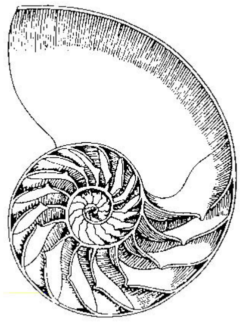
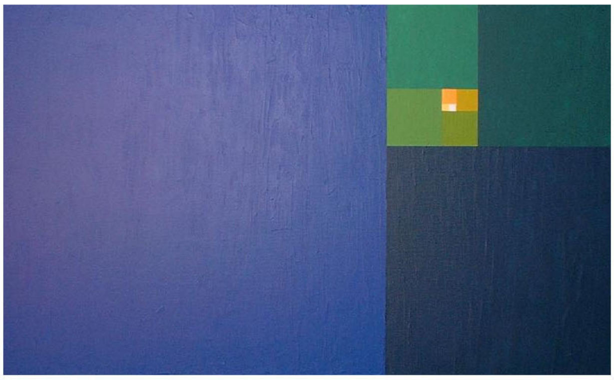
Leonardo da Pisa
alias Fibonacci







1+2=3 5 8 13 21 34 55 89

1. Juli 2003

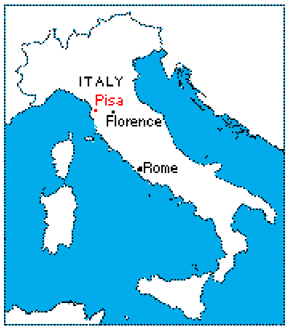
Weber Tony, Ramagnano Nicola

Inhaltsverzeichnis

Biographie

Leonardo da Pisa ist besser bekannt unter dem Namen Fibonacci. Fibonacci ist die Abkürzung von „Filius Bonacci", was soviel heisst, wie „Sohn des Bonacci".

Über Fibonaccis Leben ist sehr wenig bekannt, es existiert nicht einmal ein Portrait von ihm. Einzig eine Statue von Fibonacci wurde errichtet, sie steht heute noch in Pisa. 1978 wurde ein Bild vom Kopf der Fibonacci-Statue, welcher sich in 5 Meter befindet, gemalt.



Fibonacci ist ca. 1170 in Pisa geboren und wurde in der algerischen Hafenstadt Benjaia, wo sein Vater Guglielmo Bonacci als Diplomat tätig war, geschult.
Fibonacci bereiste mit seinem Vater viele, weit entfernte, Länder. Auf diesen Reisen hatte Fibonacci wohl mit vielen Händlern Kontakt und erfuhr dadurch viel über die verschiedenen Rechen-Systeme.
Fibonacci beendete seine Reisen um das Jahr 1200 und kehrte nach Pisa zurück.
Er hatte die Überlegenheit des indisch-arabischen Zahlen-Systems erkannt und präsentierte diese Rechnungsweise, im Jahre 1202, in seinem ersten Buch „Liber abaci".
Fibonacci lebte vor der Zeit des Druckens, seine Bücher waren also von Hand geschrieben und der einzige Weg eine Kopie zu erstellen, war es abzuschreiben. Natürlich sind Fibonaccis Bücher in lateinisch geschrieben.
Wir haben heute leider nur noch Kopien von seinen legendären Werken, welche heissen:

- „Liber abaci" (Buch des Rechnens), 1202 (1228)
- „Practica geometriae" (Praktizieren von Geometrie), 1220,
- „Liber quadratorum" (Buch der Quadratzahlen), 1225
- „Flos" (die Blume), 1225

Er schrieb noch weitere Texte, welche leider verschwunden sind.

Fibonaccis „Liber abaci" war sehr praxisbezogen. Es beginnt mit der Simplen aber fundierten Aussage:

„Die neun indischen Ziffern sind:
9 8 7 6 5 4 3 2 1
Mit diesen neun Ziffern und dem Zeichen 0 ... kann
jede Zahl dargestellt werden, wie unten gezeigt."

Er schrieb über Arithmetik und Algebra, die er während seinen Reisen kennen lernte. Der zweite Teil beinhaltet eine umfangreiche Zusammenstellung über die Probleme des Handels bzw. deren Lösung.

So verbreitete sich das indisch-arabische Zahlen-System in ganz Europa und ist bis heute das massgebende Zahlen-Sytem geblieben.

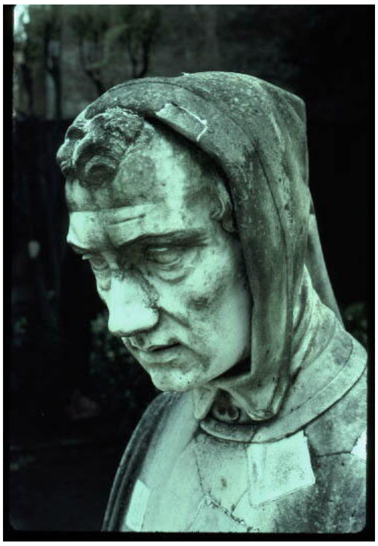
Fibonacci war so geachtet, dass Kaiser Friedrich II ihn von sich aus in seinen Kreis der Gelehrten aufnahm, um ihn als Lehrer einzusetzen.

Nach 1228 ist nur noch ein Dokument im Zusammenhang mit Fibonacci bekannt. Eine Lohnzahlung der Stadt Pisa, an „Master Leonardo", aus dem Jahre 1240, als Anerkennung für seine geleisteten Dienste gegenüber den Bürgern.

Niemand weiss wann oder unter welchen Umständen Fibonacci gestorben ist, man nimmt aber an, dass Fibonacci um das Jahr 1240 gestorben ist.

Nach dem Tode Fibonaccis, hatte die Mathematik einen Sprung um einige hundert Jahre hinter sich, und tatsächlich machte die Mathematik keinen wirklichen Fortschritt für die nächsten 300 Jahre.

Heute ist Fibonacci vor allem für die Fibonacci-Zahlenfolge berühmt.



Fibonacci – Zahlen

Definition

Leonardo entdeckte die nach ihm benannte Fibonacci Zahlenfolge, welche als festes Muster in der Natur, Musik, Architektur, Medizin, etc. zu finden ist. Fibonacci Zahlen sind durch eine unendliche Folge von Zahlen definiert, in der jede Zahl aus der Summe der beiden vorhergehenden Zahlen errechnet wird:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... etc.

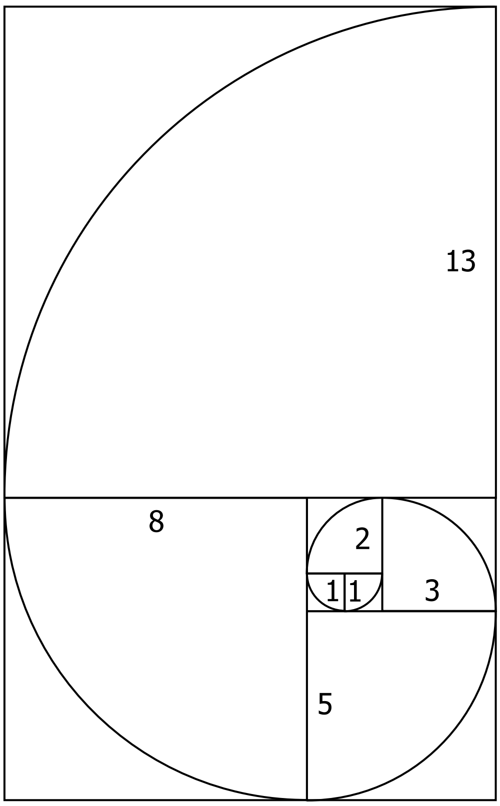
Fibonacci Spirale

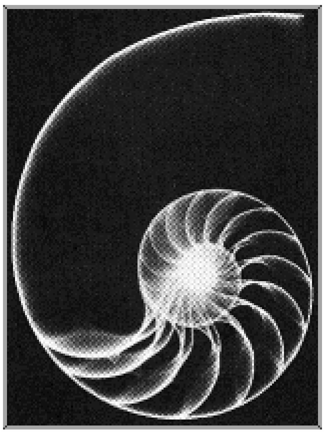
- Um eine Fibonacci-Spirale zu erhalten, müssen wir erst die Fibonacci-Rechtecke zeichnen.
- Hierfür haben wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.
- Daneben zeichnen wir ein weiteres Quadrat, das ebenfalls die Seitenlänge 1 besitzt.
- Das nächste Quadrat liegt an den zwei vorherigen Quadraten an und bekommt so die Seitenlänge 2 (=1+1).
- Des Weiteren entsteht immer ein neues Quadrat, das die Seitenlänge der zwei vorherigen Quadrate zusammen hat. Es wird bei den Fibonacci-Rechtecken immer im Uhrzeigersinn gezeichnet.

Die entstandenen Quadrate werden Fibonacci-Rechtecke genannt, weil das zu letzt entstandene Quadrat die Seitenlänge der Summe aus den Seitenlängen der zwei vorherigen Quadrate hat.

Die neue Seitenlänge lässt sich mit der folgenden Formel und den Startwerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ berechnen: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

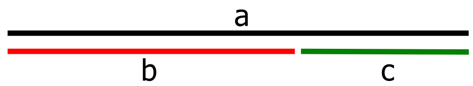
In diese Fibonacci-Rechtecke können wir jetzt die Fibonacci-Spirale einfügen, indem man in jedem Quadrat einen Viertelkreis mit dem Radius der jeweiligen Seitenlänge zieht.





Goldener Schnitt

Definition



Der Goldene Schnitt bezeichnet mathematisch gesehen zunächst einmal ein Teilungsverhältnis. Dabei wird die Gesamtstrecke a so in zwei Teilstrecken unterteilt, dass die größere Teilstrecke b (der Major) sich proportional zur Gesamtstrecke verhält wie die kleinere Teilstrecke c (der Minor) zur größeren Teilstrecke b.

Der goldene Schnitt wird auch mittels der Fibonacci-Zahlen berechnet: Nimmt man den Quotienten zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen, kommt man immer näher am goldenen Schnitt (Phi) heran.

Beispiel: $\frac{55}{34} = 1.6176$

Eine spezielle Eigenschaft des goldenen Schnitts ist, dass um es zu quadrieren, lediglich 1 dazu addieren muss. $\boxed{Phi^2 = Phi + 1}$

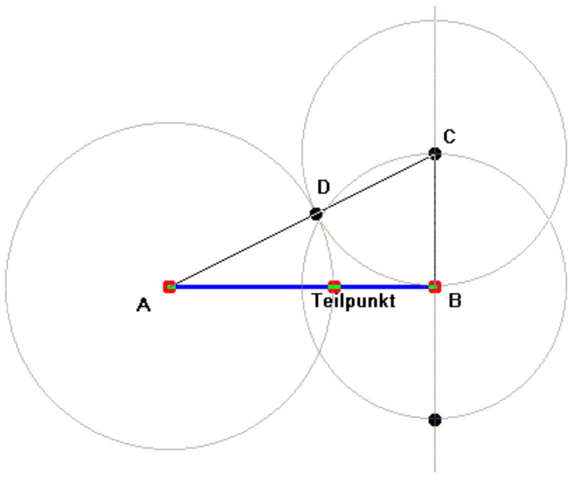
Daraus folgt die quadratische Gleichung: $\boxed{Phi^2 - Phi - 1 = 0}$

Die Gleichung ergibt zwei Lösungen: **phi= 0,618034...(minor)** **Phi= 1,618034...(major)**

Die erste Lösung $phi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ wird als goldene Zahl, bzw. $Phi = \frac{1}{phi}$ als Goldene Zahl mit $Phi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$ bezeichnet.

Konstruktion des Goldenen Schnitts:

Konstruktion mittels Kreise



Im Endpunkt der Strecke AB wird die Senkrechte errichtet. Auf ihr trägt man die Hälfte von AB ab. Es ergibt sich Punkt C. Der Kreis um C mit dem Radius CB schneidet AC bei D. Überträgt man den Abstand AD auf die Strecke AB, so ergibt sich der Teilpunkt T.

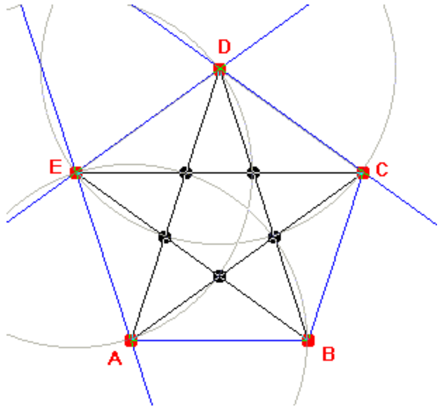
T teilt AB im Verhältnis des goldenen Schnittes.

Berechnung des Teilverhältnisses:

Sei die Strecke AB = 1. Die Strecke AT=x. So ist die Strecke TB= 1-x.

Die Proportion der stetigen Teilung 1:x = x:(1-x) ergibt die quadratische Gleichung $x^2+x-1=0$.

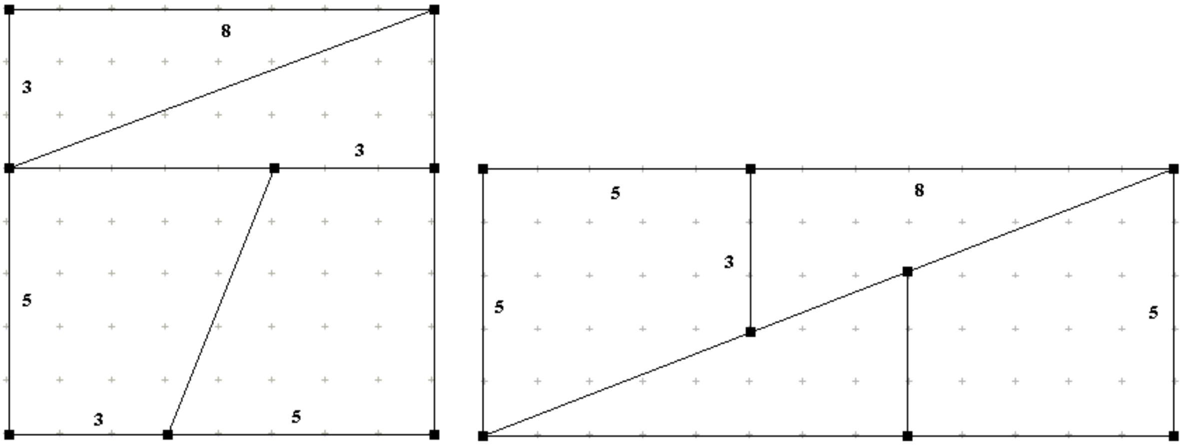
Kontruktion mittels Fünfeck



- Im regelmäßigen Fünfeck stehen die Seiten und die Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale wird durch den Schnittpunkt mit anderen Diagonalen wiederum in diesem Verhältnis geteilt.

Fibonacci in der Mathematik

64=65 ?



Immer sind es drei aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen, die die Seitenlänge der Dreicke und Trapeze bestimmen, so dass die Teilfiguren geschickt zusammengelegt werden können.

2, 3, 5:	24 = 3 * (3+5)	und	$25 = 5^2$
3, 5, 8:	65 = 5 * (5+8)	und	$64 = 8^2$
5, 8, 13:	168 = 8 * (8+13)	und	$169 = 13^2$

usw.

Lösung: Es müssten im Rechteck die Verhältnisse der Dreicksseiten gleich sein, aber 8/3=2,6666666... und (5+8)/5 = 13/5 = 2,6

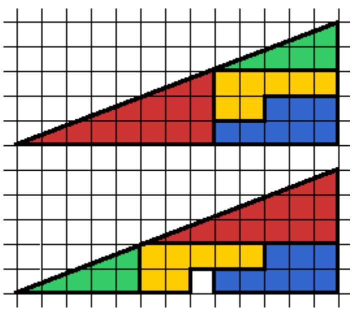
Fibonacci im Pascal – Dreieck

1	1	2							
1	1	3	5						
1	2	1	8	13					
1	3	3	1	21	34				
1	4	6	4	1	55				
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Das Pascal – Dreieck mit versteckten Fibonaccizahlen. Die Summe der Zahlen in jeder Diagonalen bilden die Fibonaccizahlen.

Fibonacci Jigsaw Puzzle

Wo liegt der Hund begraben?

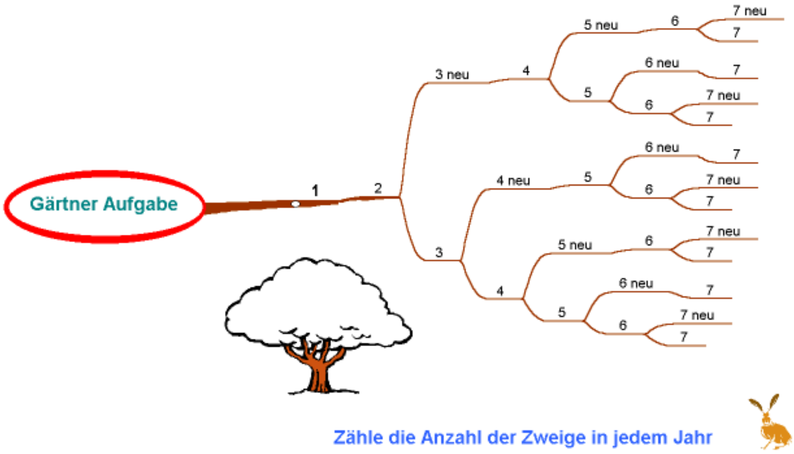


Fibonacci in der Natur

Baumschnitt-Aufgabe

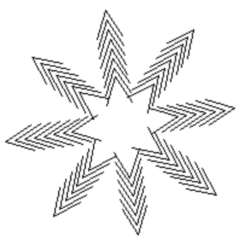
Hobbygärtner Grün schneidet seine Bäume nach folgender Regel:

- An allen neuen Trieben werden im ersten und zweiten Jahr alle Seitentrieben entfernt.
- Von dritten Jahr wird jedem Trieb in jedem Jahr genau ein neuer Trieb gelassen

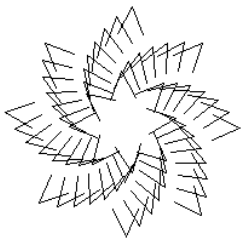


Drehwinkel bei Pflanzen

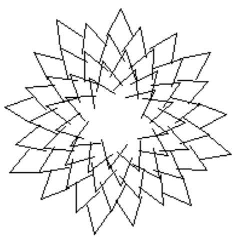
Der Drehwinkel zwischen zwei Blatt- oder Knospenansätzen heisst Divergenzwinkel. Jede Pflanze hat einen charakteristischen Drehwinkel. Nur kleine Änderungen des Drehwinkels ergeben gravierende Änderungen.



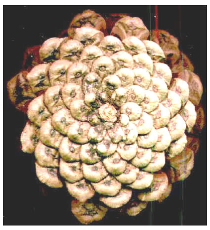
w=135°
achtfache Rotationssymmetrie



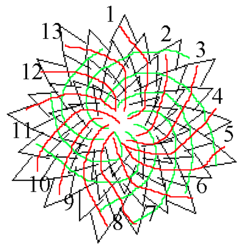
w=136
acht rechtsdrehende Spiralen

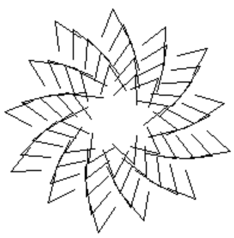


w=137,5°
- der goldene Drehwinkel

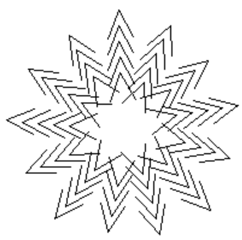


8 rechtsdrehende und 13 linksdrehende Spiralen





w=138°
13 linksdrehende Spiralen



w=138,5°
13fache Drehsymmetrie

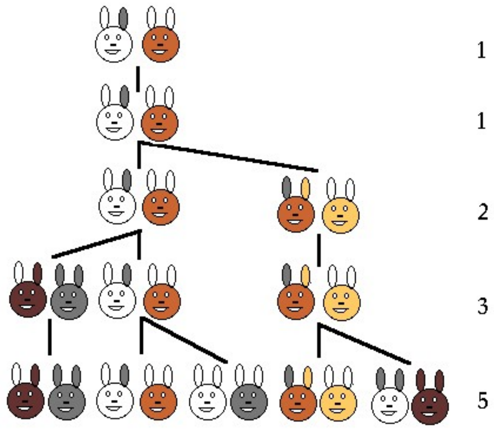
Kaninchenproblem aufgestellt im Jahr 1202 von Fibonacci

Angenommen ein neugeborenes paar von Kaninchen, ein Männchen und ein Weibchen, werden auf einem Feld ausgesetzt. Die Kaninchen können sich nach einem Monat paaren, so dass das Weibchen am Ende des ersten Monats ein weiteres Pärchen von Kaninchen zeugen kann.

Nimmt man weiterhin an, dass die Kaninchen nie sterben und, dass das Weibchen jeden Monat ein weiteres Pärchen (Männchen und Weibchen) vom zweiten Monat an zeugt.

Die Frage stellt sich nun:

Wie viele Pärchen werden es in einem Jahr sein?



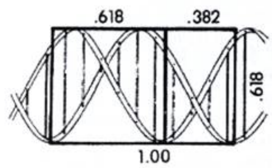
Monat:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Fib(Monat):	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

Wenn wir nun f(n) als die Anzahl der Kaninchen am Anfang des n-ten Monats definieren, können wir zeigen, dass f(1)=1, f(2)=1 und f(n)=f(n-1)+f(n-2) was genau die Definition der Fibonacci-Zahlenfolge ist (welche zusätzlich noch f(0)=0 einschliesst).

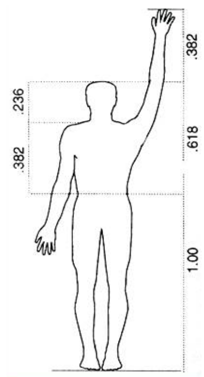
Wir fangen also im ersten Monat mit einem frisch geborenen Kaninchenpärchen an, also f(1)=1.

Nach dem zweiten Monat gibt es immer noch nur ein Kaninchenpärchen, da noch keine weiteren Kaninchen gezeugt wurden, also f(2)=1.

Verblüffendes

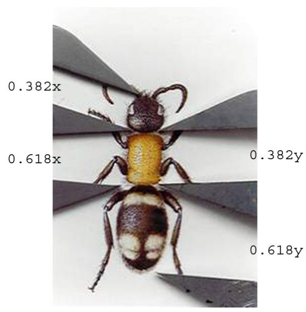


DNS

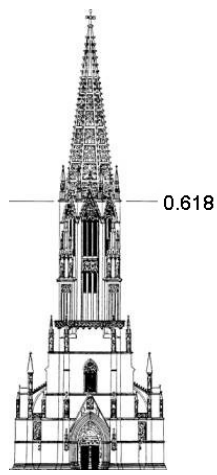


Mensch

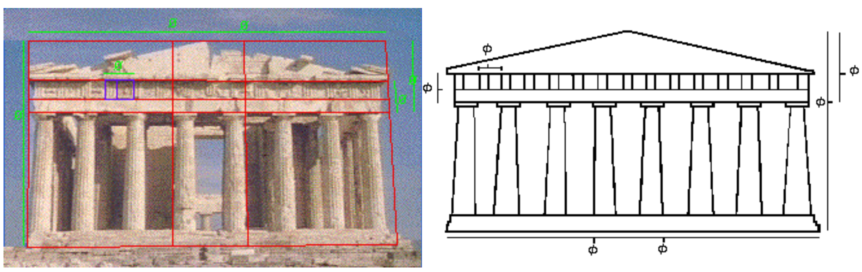
Menschliche Hand



Insekt



Freiburger Münster


Parthenon – Athen