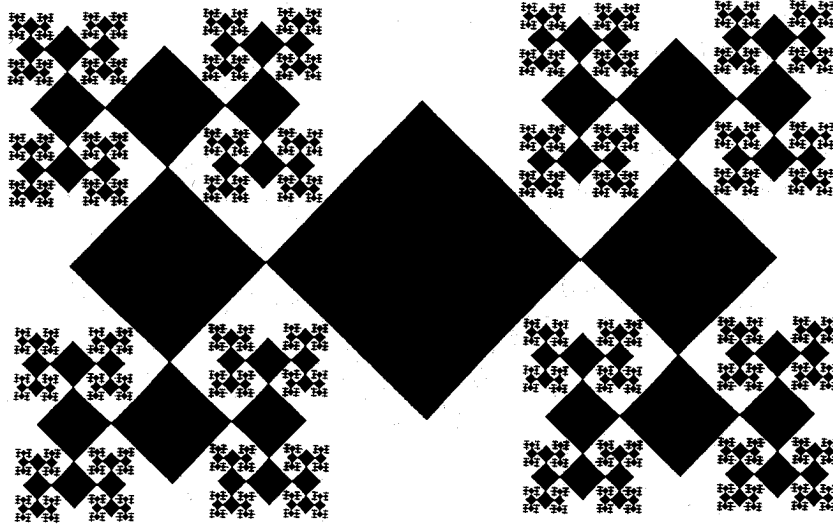


Hans Walser

# Geschichte der Mathematik



## Der Goldene Schnitt Lernumgebung



**Inhalt**

1	Steifen-Pentagramm .....	1
2	Näherungskonstruktionen für das regelmäßige Fünfeck .....	1
3	Näherungskonstruktionen für das regelmäßige Fünfeck .....	2
4	Quadrate .....	2
5	Füllkreis .....	3
6	Papierstreifen.....	3
7	Die Figur von Odom .....	4
8	Fibonacci.....	5
9	Fibonacci.....	5
10	Fibonacci ausgedünnt.....	5
11	Andere Rekursion.....	5
12	Andere Rekursion.....	6
13	In der Natur.....	6
14	Hyperbel.....	6
15	Kettenwurzeln.....	7
16	Kettenwurzeln.....	8
17	Die Cheops-Pyramide .....	8
18	Fraktal .....	10

2006 Probeausgabe

2007 Kürzung. MathType. Korrekturen

last modified: 18. November 2006

Hans Walser

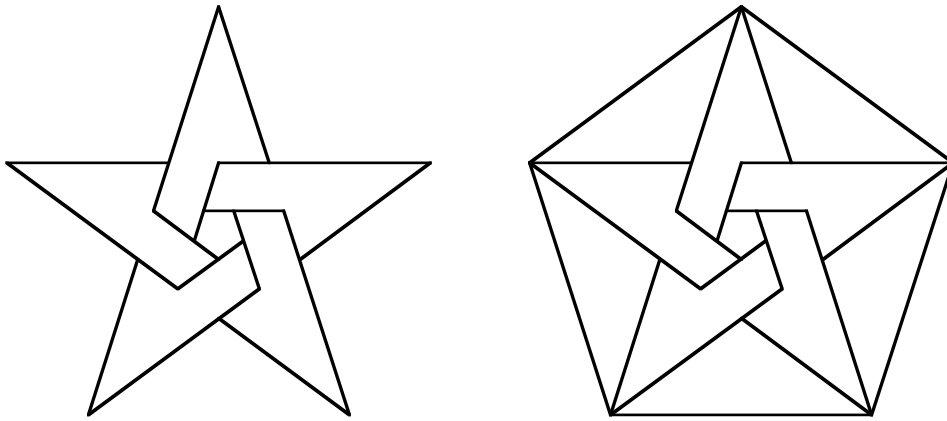
Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel

[www.math.unibas.ch/~walser](http://www.math.unibas.ch/~walser)

[hwals@bluewin.ch](mailto:hwals@bluewin.ch)

### 1 Steifen-Pentagramm

Wie groß ist das innerste Fünfeck im Vergleich zum äußersten Fünfeck?



**Streifen-Pentagramm**

#### Ergebnis

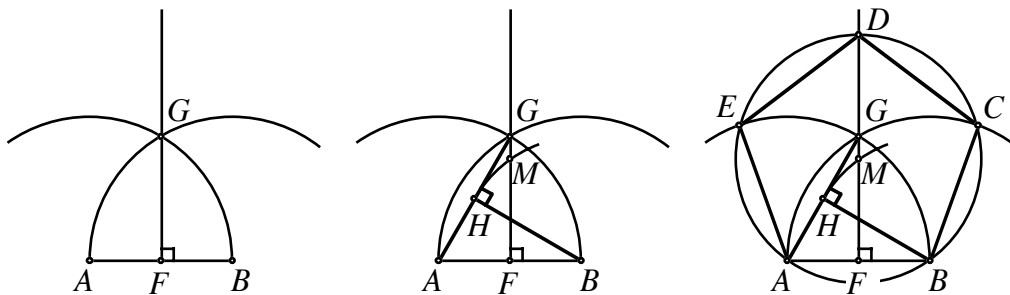
Faktor  $(\rho - \frac{1}{2}) \approx 0.1180$

Bemerkung: Bezogen auf den Umkreisradius  $r$  ist die Streifenbreite  $d$ :

$$d = \frac{r}{4} \sqrt{\frac{5\tau+5}{8\tau+5}} \approx 0.2135r$$

### 2 Näherungskonstruktionen für das regelmäßige Fünfeck

Die Abbildungsfolge zeigt ein Verfahren, das auf LEONARDO DA VINCI (1452-1519) zurückgehen soll.



**Näherungskonstruktion von LEONARDO DA VINCI**

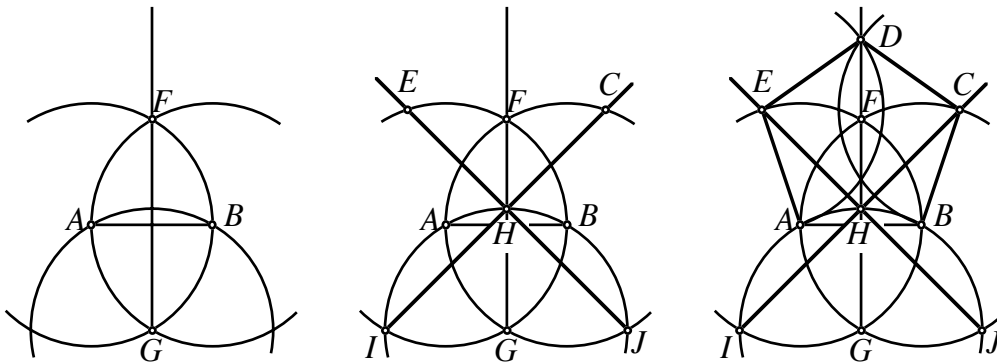
Wie gut ist das Verfahren von LEONARDO DA VINCI?

#### Ergebnis

Es sei  $s$  die Seitenlänge und  $r$  der Umkreisradius. Bei der Konstruktion von LEONARDO DA VINCI ist:  $\frac{s}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547$ . Beim regelmäßigen Fünfeck ist:  $\frac{s}{r} = \sqrt{3 - \tau} \approx 1.1756$ . Fehler  $\approx 1.8\%$ . Das Fünfeck ist weder gleichseitig noch gleichwinklig.

### 3 Näherungskonstruktionen für das regelmäßige Fünfeck

Die Abbildungsfolge zeigt ein Verfahren, das Albrecht DÜRER (1471-1528) zugeschrieben wird.



#### Näherungskonstruktion von Albrecht DÜRER

Wie gut ist das Verfahren von DÜRER?

#### Ergebnis

Das Fünfeck ist zwar gleichseitig, aber nicht gleichwinklig. Es hat keinen Umkreis. Für den Winkel  $\alpha$  an der Ecke A ergibt sich (Tipp: Sinussatz im Dreieck AJE anwenden):

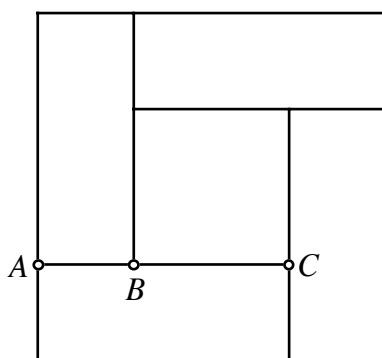
$$\alpha = 135^\circ - \arcsin(\sqrt{3} \sin(15^\circ)) \approx 108.3661^\circ$$

Im regelmäßigen Fünfeck ist der Innenwinkel  $108^\circ$ . Fehler  $\approx 0.3\%$ .

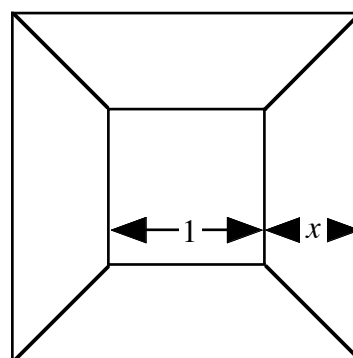
### 4 Quadrate

a) Ein Quadrat wird gemäß Abbildung a) in fünf flächengleiche Teile unterteilt. In welchem Verhältnis teilt der Punkt B die Strecke AC?

b) Ein Quadrat wird gemäß Abbildung b) in fünf flächengleiche Teile unterteilt. Wie groß ist  $x$ ?



a)



b)

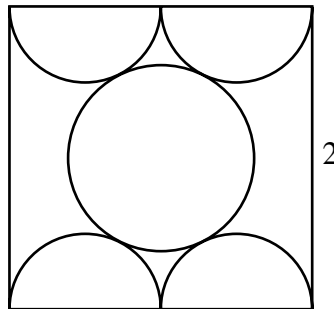
#### Unterteilung

#### Ergebnis

a) Teilung im Goldenen Schnitt:  $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \rho$ .    b)  $x = \rho$

### 5 Füllkreis

Einem Quadrat der Seitenlänge 2 werden zunächst Halbkreise gemäß Abbildung einbeschrieben und danach in der Mitte ein Füllkreis. Welchen Radius hat dieser?



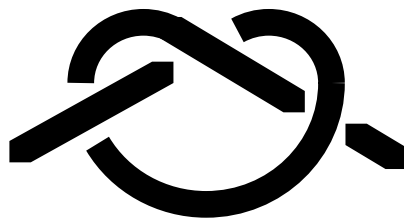
**Wie groß ist der Radius des Füllkreises?**

#### Ergebnis

Der Füllkreis hat den Radius  $\rho$ .

### 6 Papierstreifen

Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, aus einem Papierstreifen von ca. 2 cm Breite einen einfachen Knoten nach dem Schema der Abbildung a) herzustellen. Die Abbildung b) zeigt den noch losen Papierstreifen-Knoten.



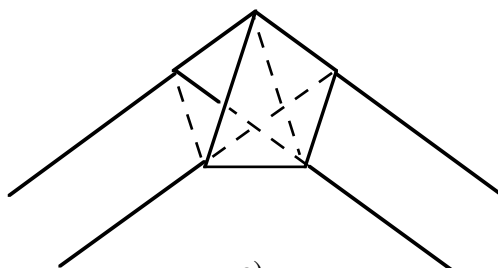
a)



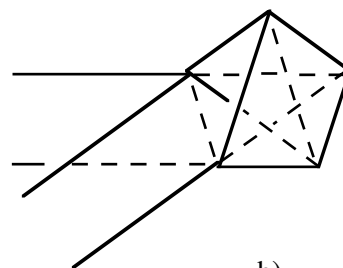
b)

#### Der Knoten

Vorsichtiges Zusammenziehen und Flachdrücken des Knotens ergibt ein regelmäßiges Fünfeck mit zwei „Schwänzchen“ (Abb. a). Verwenden wir einen Streifen aus Transparentpapier und biegen eines der beiden Schwänzchen zurück, erscheint im Innern des Fünfeckes ein regelmäßiger Fünfsack-Stern, ein so genanntes Pentagramm (Abb. b). Weitere Methoden, um aus einem Papierstreifen ein regelmäßiges Fünfeck herzustellen, sind in [H/P] besprochen.



a)



b)

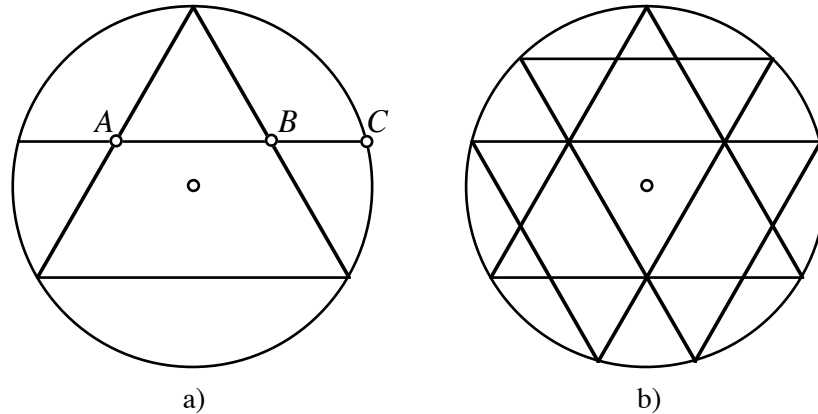
#### Fünfeck und Pentagramm

Vorsichtiges Zusammenziehen und Flachdrücken des Knotens ergibt ein regelmäßiges Fünfeck mit zwei „Schwänzchen“ (Abb. a). Verwenden wir einen Streifen aus Transpa-

rentpapier und biegen eines der beiden Schwänzchen zurück, erscheint im Innern des Fünfeckes ein regelmäßiger Fünfsack-Stern, ein so genanntes Pentagramm (Abb. b).

## 7 Die Figur von Odom

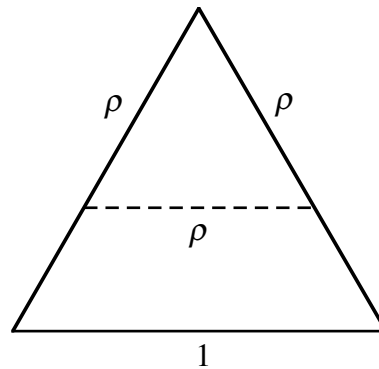
Im gleichseitigen Dreieck der Abbildung a) sind die Punkte  $A$  und  $B$  die Seitenmitten. Dann teilt der Punkt  $B$  die Strecke  $AC$  im goldenen Schnitt (nach George Odom, vgl. [Beutelspacher/Petri 1989], S. 22).



### Die Figur von George Odom

Durch Ergänzen erhalten wir daraus die Sternfigur der Abbildung b). Dies ist die Ausgangsfigur für den folgenden Bastelvorschlag: Wir unterteilen zwei Seiten eines gleichseitigen Dreieckes im Goldenen Schnitt und verbinden die beiden Teilpunkte durch eine Faltnie.

Wir brauchen drei gleich große solcher Bauteile. Wir falten je an der Faltnie und fügen die drei Teile so zusammen, dass die drei Faltnie ihrerseits ein gleichseitiges Dreieck bilden.

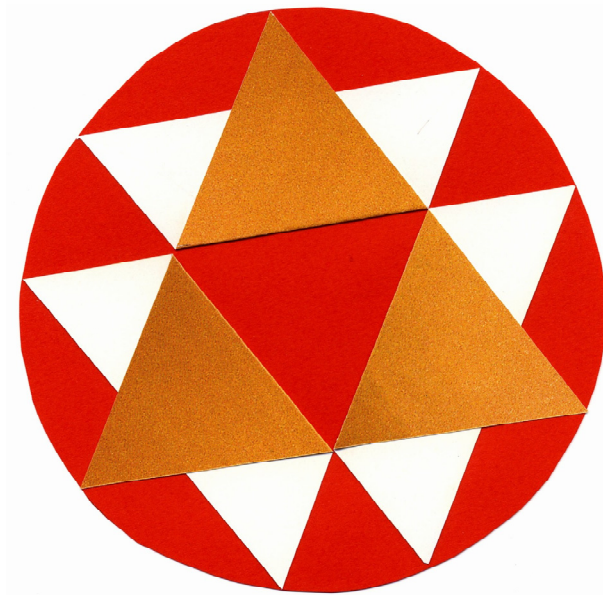


### Bauteil

So entsteht ein Stern mit neuen Spitzen, die alle auf einer Kreislinie liegen; das ist der Gag der Sache. Wir kleben die drei Teile daher auf eine passende Kreisscheibe. Es können zum Beispiel alte CD's verwertet werden. Bei gegebenem Kreisradius  $r$  ist die Seitenlänge  $s$  des Dreieckes:

$$s = \frac{1}{\rho} \frac{\sqrt{3}}{2} r \approx 1.401 r$$

Im Beispiel der folgenden Abbildung sind die Dreiecke aus Papier mit verschiedenen Farben auf Vorder- und Rückseite geschnitten.



**Stern im Goldenen Schnitt**

## 8 Fibonacci

Was erhalten wir, wenn wir die Fibonacci-Folge „rückwärts“ laufen lassen?

### Ergebnis

$z$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_z$	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13

Es ist  $a_0 = 0$  und  $a_{-n} = (-1)^{n+1} a_n$ ,  $n > 0$ .

## 9 Fibonacci

Welche Fibonacci-Zahlen haben eine der vorangehenden Fibonacci-Zahlen als Teiler?

### Ergebnis

Die Zahl  $a_n$  teilt  $a_m$ , wenn  $m$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $n$  ist.

## 10 Fibonacci ausgedünnt

Aus der Fibonacci-Folge wählen wir jedes zweite Glied aus. Welche Rekursion gilt für diese Teilfolge?

### Ergebnis

Die Rekursion lautet  $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ .

## 11 Andere Rekursion

Wie verhält sich eine Folge mit beliebigen Startwerten und der Rekursion

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n?$$

**Ergebnis**

Die Folge ist periodisch mit der Periodenlänge 6.

**12 Andere Rekursion**

Wie verhält sich eine Folge mit natürlichen Zahlen als Startwerten und der Rekursion

$$a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|?$$

**Ergebnis**

Nach endlich vielen Schritten ergibt sich eine periodische Folge mit der Periode  $cc0$ ; dabei ist  $c$  der größte gemeinsame Teiler der beiden Startwerte.

**13 In der Natur**

Ob der Goldene Schnitt in der Natur vorkommt, ist umstritten. Messresultate sind ungenau, und die Gefahr besteht, die Messresultate im erhofften Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt zu interpretieren. Apriori ist es nicht möglich, eine mit einer endlichen Genauigkeit ermittelte Maßzahl der irrationalen Zahl des Goldenen Schnittes zuzuordnen. Hingegen ist es natürlich möglich, aus einer durch Experimente erhärteten Modellvorstellung theoretische Folgerungen zu ziehen, die allenfalls zu irrationalen Zahlen und insbesondere zum Goldenen Schnitt führen können.

Hingegen ist es erstaunlich, dass die mit dem Goldenen Schnitt verwandten Fibonacci-Zahlen bei verschiedenen Pflanzen erscheinen. Etwa bei den Zapfen einiger Koniferen (Zapfen tragende Nadelholzgewächse) finden wir eine spiralförmige Schuppen-Anordnung. Dabei gibt es Spiralen mit „Rechtsschraubung“ und auf dem gleichen Zapfen Spiralen mit „Linksschraubung“. Die Anzahlen dieser rechts- beziehungsweise links-gängigen Spiralen sind oft aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen.

Beispiele:

Baumart	Anzahl rechts laufende Spiralen	Anzahl links laufende Spiralen
Douglastanne	3	5
Föhre	5	8
Lärche	5	3
Rottanne	13	8

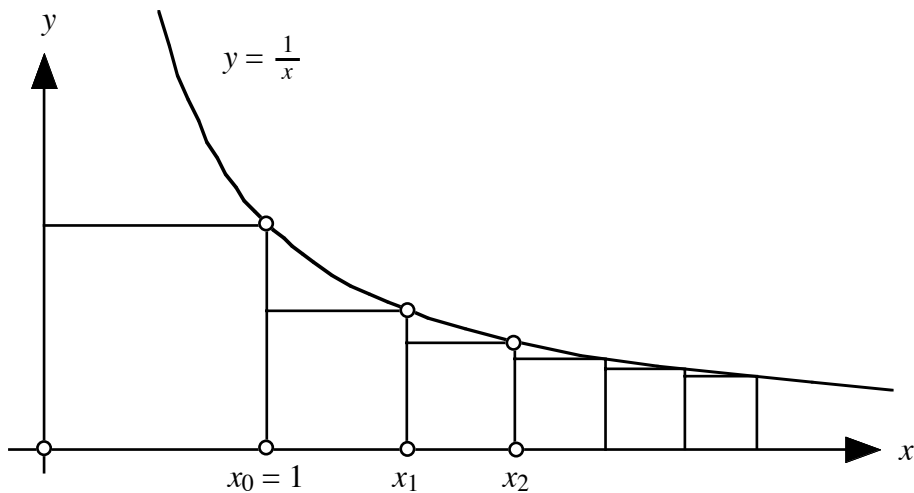
Dasselbe Phänomen tritt bei Blatt- und Blütenständen verschiedener Pflanzen auf, ebenso bei Fruchtständen, zum Beispiel bei der Anordnung der Kerne in einer Sonnenblume.

Untersuchen Sie einige Blütenstände oder Koniferen-Zapfen auf Fibonacci-Zahlen.

**14 Hyperbel**

Unter der Hyperbel  $y = \frac{1}{x}$  wird zunächst das Einheitsquadrat eingezeichnet und dann eine Folge von Quadraten gemäß Abbildung 5.13. Wie groß ist das zweite Quadrat?





**Quadrate unter der Hyperbel**

**Ergebnis**

Die in der Abbildung angegebene Folge  $\{x_n\}$  hat den Startwert  $x_0 = 1$  und die Rekursion:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{4 + x_n^2}}{2}$$

Somit ist  $x_1 = \tau$ ; das zweite Quadrat hat die Seitenlänge  $\rho$ .

**15 Kettenwurzeln**

Wie groß ist

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} ?$$

**Bearbeitung**

Zur Untersuchung dieser Frage studieren wir eine Folge  $\{w_n\}$  mit dem Startwert  $w_1 = 1$  und der Rekursion

$$w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n} .$$

Numerisch:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_n$	1.000	1.414	1.544	1.598	1.612	1.616	1.617	1.618

Wir vermuten, dass

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \tau .$$

Um dies einzusehen, setzen wir den Grenzwert  $w$  in die Rekursion ein und erhalten

$$w = \sqrt{1+w}$$

oder

$$w^2 = 1+w$$

mit den beiden Lösungen  $\tau$  und  $-\rho$ . Die zweite Lösung entfällt, da alle  $w_n$  als Quadratwurzeln positiv sind.

## 16 Kettenwurzeln

Wie groß ist  $w = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}}$  ?

- mit dem Startwert  $w_1 = 1$ ?
- mit dem Startwert  $w_1 = 0.5$ ?

### Ergebnis

- Kein Grenzwert. Periodische Folge 1, 0, 1, 0, ...
- Grenzwert  $\rho$ .

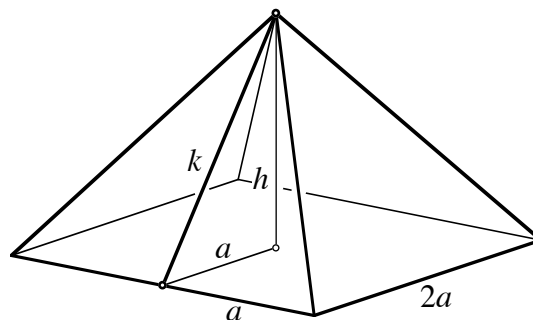
## 17 Die Cheops-Pyramide

Es ist immer wieder versucht worden, Schlüsselzahlen der Mathematik wie die Kreiszahl  $\pi$  oder den Goldenen Schnitt in den Maßverhältnissen der Cheops-Pyramide zu finden.

Im Laufe der Zeit ist diese Pyramide natürlich durch Verwitterung und menschliche Einflüsse derart erodiert, dass es nicht mehr möglich ist, die ursprünglich von den Bauherren vorgesehenen Maße festzustellen.

Der Steigungswinkel der vier Seitenflächen der Pyramide wurde im frühen 19. Jahrhundert von Howard-Vyse mit  $51.85^\circ$  gemessen. Howard-Vyse verwendete dazu Verkleidungssteine, die an der untersten Schicht noch unversehrt an ihrem originalen Platz standen. Diese Steine sind in der Zwischenzeit zerstört worden, so dass eine Nachmessung nicht mehr möglich ist.

Den folgenden Rechnungen basieren auf einer Pyramide mit der Seitenlänge  $2a$  an der Grundkante und der Höhe  $h$ . Ferner sei  $k$  die Höhe der gleichschenkligen Seitendreiecke.



### Pyramide

Über die Maßverhältnisse bei der Cheops-Pyramide sind im Laufe der Zeit verschiedene Hypothesen entstanden. Im Folgenden werden die drei wichtigsten Hypothesen besprochen.

### Rationales Verhältnis

Oft wird angenommen, dass die Steigung der Seitenflächen ein einfaches rationales Verhältnis, nämlich 28:22 ist. In diesem Falle wäre

$$h = \frac{14}{11} a = 1.27\overline{a}$$

und

$$k = a\sqrt{1 + \left(\frac{14}{11}\right)^2} \approx 1.6186a.$$

Für den Steigungswinkel der Seitenflächen ergibt sich aus dieser Annahme:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{14}{11}\right) \approx 51.8428^\circ$$

### Der Goldene Schnitt

Aus dem numerischen Wert  $k \approx 1.6186a$  ergibt sich die Vermutung, dass die Bauleute den Goldenen Schnitt mit  $\frac{k}{a} = \tau$  in der Pyramide vermauert haben.

Für den Steigungswinkel der Seitenflächen ergibt sich aus dieser zweiten Annahme:

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{1}{\tau}\right) = \arccos(\rho) \approx 51.8273^\circ$$

### Die Kreiszahl $\pi$

Eine weitere Hypothese ist, dass die Höhe der Pyramide gleich dem Radius des Kreises gewählt wurde, welcher den gleichen Umfang hat wie das Basisquadrat der Pyramide. Dies hieße:

$$2\pi h = 8a$$

Daraus ergibt sich:

$$h = \frac{4}{\pi} a \approx 1.2732a$$

Für den Steigungswinkel der Seitenflächen ergibt sich aus dieser dritten Annahme:

$$\alpha_3 = \arctan\left(\frac{4}{\pi}\right) \approx 51.8540^\circ.$$

### Vergleich

Die drei Hypothesen ergeben Steigungswinkel, die sich nur wenig unterscheiden. Sie widersprechen sich aber, und dies nicht nur numerisch. Im ersten Fall haben wir eine rationale Steigung, im zweiten Fall mit dem Goldenen Schnitt eine irrationale Steigung, und zwar eine algebraisch-irrationale Steigung, welche sich durch Wurzelausdrücke angeben lässt. Im dritten Fall mit der Kreiszahl  $\pi$  haben wir schließlich eine transzendent-irrationale Steigung.

### Näherungswerte

Der Vergleich der drei Hypothesen führt aber auf Näherungswerte für die Kreiszahl  $\pi$  wie auch für den Goldenen Schnitt.

Aus der Annahme einer rationalen Steigung von 28:22 ergibt sich:

$$\frac{4}{\pi} \approx \frac{28}{22}, \text{ also } \pi \approx \frac{22}{7} = 3.142857$$

Für viele praktische Zwecke ist dies ein recht brauchbarer Näherungswert. Ferner erhalten wir:

$$\tau \approx \sqrt{1 + \left(\frac{14}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{317}}{11} \approx 1.6186$$

Dieser Näherungswert ist wenig sinnvoll, da  $\tau$  ohnehin durch eine Quadratwurzel gegeben ist.

Hingegen können wir jetzt auch die Kreiszahl  $\pi$  durch den Goldenen Schnitt approximieren und umgekehrt. Aus

$$\frac{4}{\pi} \approx \sqrt{\tau^2 - 1} = \sqrt{\tau}$$

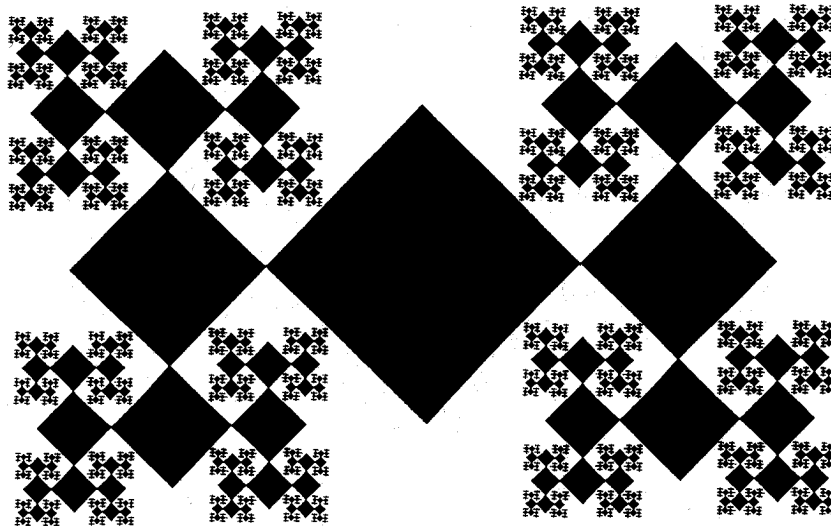
erhalten wir einerseits

$$\pi \approx \frac{4}{\sqrt{\tau}} = 4\sqrt{\rho} \approx 3.1446$$

und andererseits

$$\tau \approx \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \approx 1.6211 \quad \text{sowie} \quad \rho \approx \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.6169.$$

## 18 Fraktal



### Fraktal

Wo findet sich der Goldene Schnitt in diesem Fraktal?

### Ergebnis

Der Verkleinerungsfaktor ist  $\rho$ . Der Umriss ist ein Goldenes Rechteck.