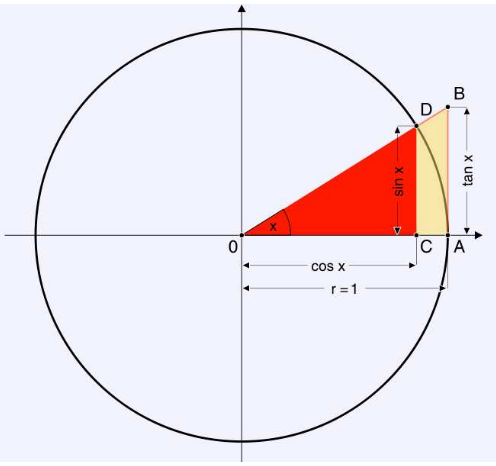
Trigonometrie

In diesem Themenbereich wenden wir uns den Winkeln im rechteckigen Dreieck zu. Du hast auf deinem Taschenrechner sicher schon die Tasten „sin“, „cos“ und „tan“ gesehen. Doch was bedeuten sie? Das wollen wir herausfinden.

Der Einheitskreis

Wir haben ein Koordinatensystem mit der x-Achse und der y-Achse. Nun wird ein Kreis gebildet mit dem Radius r=1.



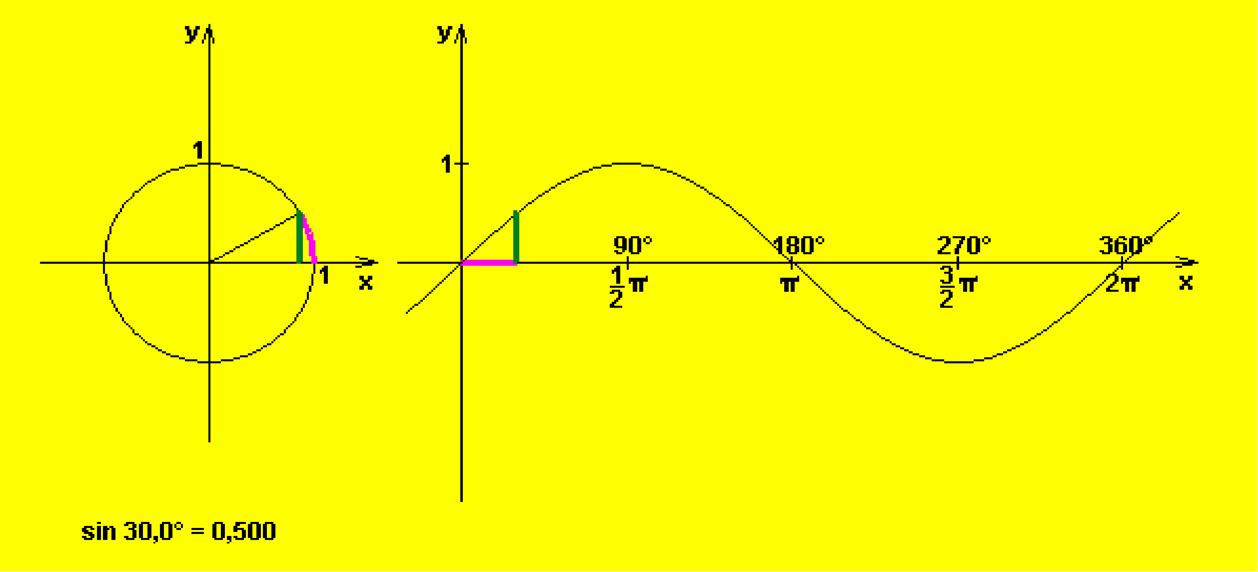
Der Winkel x spannt ein rechtwinkliges Dreieck auf. Die Länge der Gegenkathete entspricht nun der Funktion sin(x). Die Länge der Ankathete entspricht der Funktion cos(x). Die Strecke der Länge AB entspricht der Funktion tan(x).

sin: Sinus cos: Cosinus tan: Tangens

Nun möchten wir die Sinus- und Kosinuskurve betrachten. Den Tangens lassen wir vorläufig weg. Wie sehen diese aus?

Sinuskurve

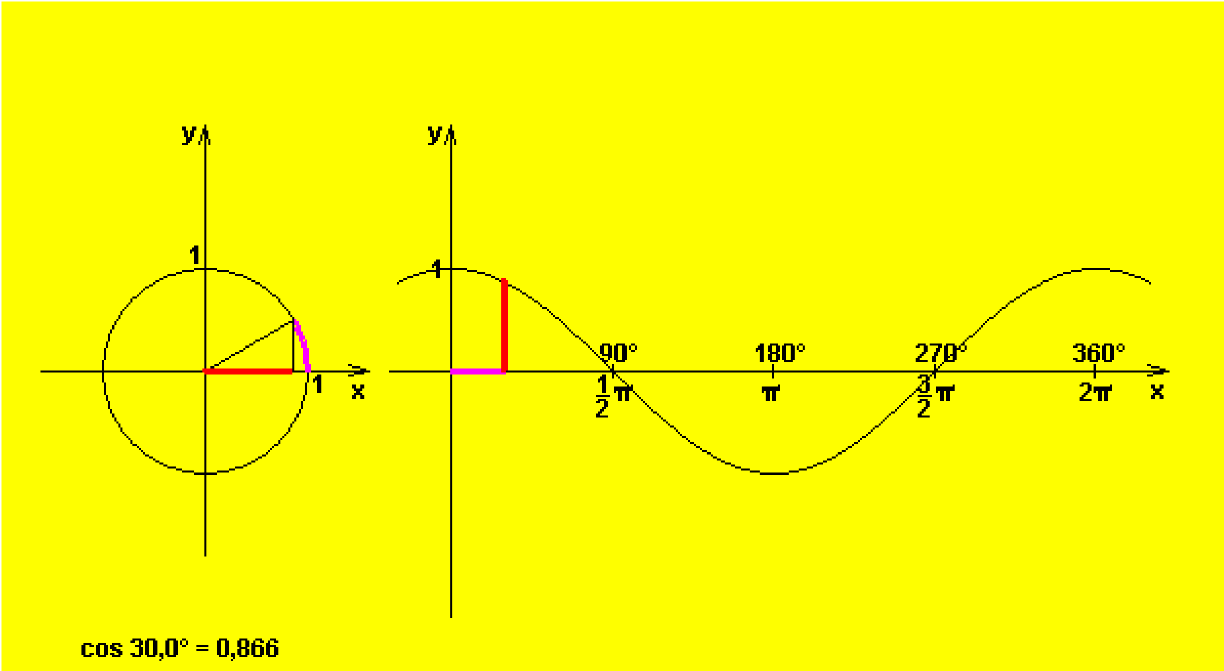
Die Sinuskurve zeigt die Werte für sin(x) von 0° - 360° an. Im untenstehenden Bild sehen wir, das sin(0) = 0 ist. Überschreitet man 180° werden die Werte der y-Achse negativ.



Wir sehen dass man die Winkel auch im Bogenmass angeben kann. Du weißt: Umfang eines Kreises ist $2r\pi$, da r=1 ist der Umfang genau 2π. 2π=360°. Dies gilt nur für den Einheitskreis.

Kosinuskurve

Die Kosinuskurve zeigt die Werte für cos(x) von 0° - 360°. Der Wert cos(0) = 1. Warum? Weil die Ankathete genau dem Radius (r=1) im Einheitskreis entspricht. Bei cos(90) ist der Wert 0. Da nun die Ankathete den Wert 0 hat. Anschliessend werden die Werte bis cos(270) negativ.



Jeder Wert für sin(x) und cos(x) bezieht sich also auf einen bestimmten Winkel im Einheitskreis.

Winkel im rechtwinkligen Dreieck

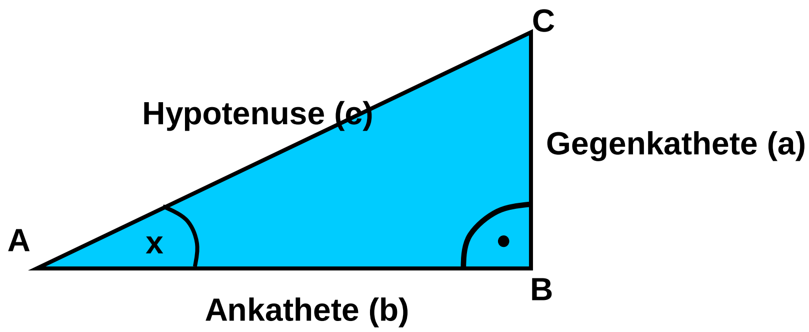
Wichtig wird nun die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks. Sie ist im Einheitskreis immer =r, also hat sie immer den Wert 1.

Es gilt:

$$\sin(x) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(x) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(x) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$$



Wenn man also die Längen der drei Seiten des Dreiecks kenn kann man den Sinus- oder Kosinuswert des Winkels x bestimmen.

Um nun den Winkel (x) zu erhalten nimmt man den Wert für sin(x) oder cos(x) und nimmt jeweils die Umkehrfunktion davon. Den Arcussinus oder den Arcuscosinus. Auf dem Taschenrechner sehen die Felder so aus: „$\sin^{-1}$“ oder „$\cos^{-1}$“.

Aufgaben:

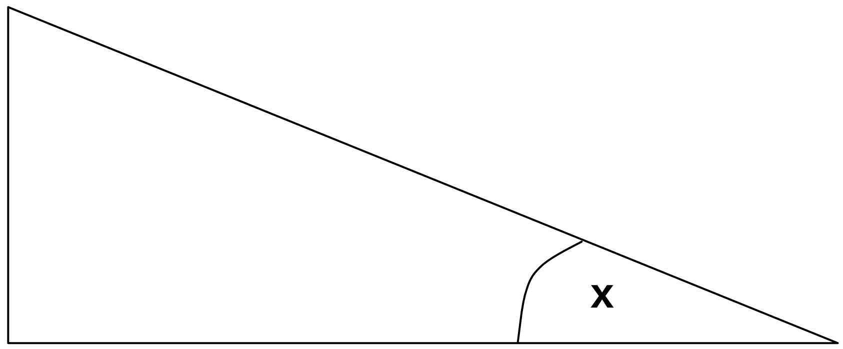
1. Zeichne waagrecht eine Gerade der 11cm. Am Ende der Gerade zeichnest du senkrecht dazu eine Gerade der Länge 6cm. Zeichne dazu die Hypotenuse und berechne diese mit dem Pythagoras. Der gesuchte Winkel ist jener links unten.

a) berechne sin(x) mit Hilfe der Formel von oben.

b) berechne den Winkel x mit dem Arcussinus.

c) berechne nun auch cos(x) und anschließend den Winkel mit dem Arcuscosinus

2. Untenstehendes rechtwinkliges Dreieck sei gegeben. Berechne den Winkel (x) indem du die Katheten und die Hypotenuse abmisst.



Berechne anschließend noch den 3. Winkel.

3. Kurzaufgaben

a) sin(63) = ………………

b) arccos (0.567)=………………

c) Ankathete = 13.2cm Hypotenuse = 16cm Wie gross ist der Winkel x?

Lösungen

1 Hypotenuse: 12.53cm Gegenkathete: 6cm Ankathete: 11cm

a) $\sin(x) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c} = \frac{6}{12.53} = 0.48$ b) arcsin(0.55)=28.61°

c) $\cos(x) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c} = \frac{11}{12.53} = 0.88$ arccos(0.88)=28.61°

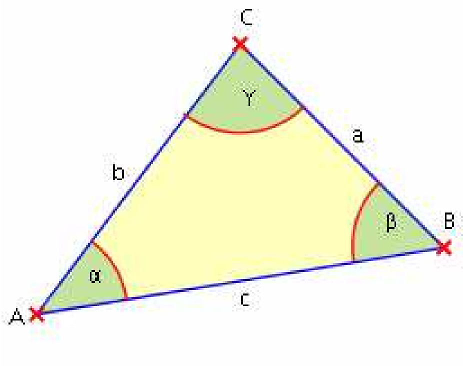
2 $\cos(x) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c} = \frac{11}{11.88} = 0.93$ arccos(0.93)=22.25°

3 a) 0.89 b) 55.46° c) 34.41°

Berechnung im allgemeinen Dreieck

Nun möchten wir versuchen, Berechnungen im allgemeinen Dreieck durchzuführen. Mit Hilfe des Sinussatzes und des Kosinussatzes.

Der Sinussatz



Mit dem Sinussatz ist es möglich mit den Angaben von zwei Seitenlängen und einem Winkel einen zweiten Winkel zu bestimmen, oder mit zwei Winkeln und einer Seitenlänge eine zweite Seitenlänge zu bestimmen. Wer die Herleitung des Sinussatzes kennen lernen möchte, der kann dies selbständig tun. Im Anhang findest du die Angaben.

Satz: Die Seite eines Dreiecks verhalten sich zueinander wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel!

Den Sinussatz schreibt man formell in der folgenden Schreibweise:

:
$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Daraus lassen sich folgende drei Gleichungen konstruieren:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \qquad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Beispiel: Die Seitenlänge a eines Dreiecks beträgt 8cm. Die Seitenlänge b beträgt 9cm. Der Winkel α ist 52°. Berechne den Winkel β!

$$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{9 \cdot \sin(52)}{8} = 0.89$$

arcsin(0.89)=62.44°

Der Winkel β beträgt also 62.44°. Den dritten Winkel können wir nun sehr schnell auch noch bestimmen: 180°-52°-62.44° = 65.56°= γ

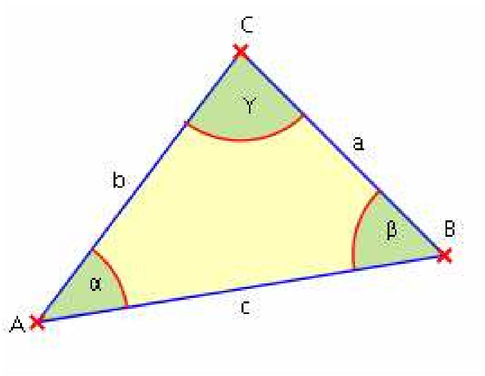
Bestimmen wir noch kurz die dritte Seitenlänge c!

$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{8 \cdot \sin(65.56°)}{\sin(52°)} = 9.24cm$$

Ist in einem allgemeinen Dreieck eine Seite und ihr gegenüberliegender Winkel bekannt, so lässt sich unabhängig vom dritten Bestimmungsstück das Dreieck auf jeden Fall mit dem Sinussatz vollständig berechnen.

Kosinussatz

Mit dem Kosinussatz ist es möglich mit den Angaben der drei Seitenlängen alle Winkel zu bestimmen. Ausserdem kann man, wenn zwei Seiten und ihr eingeschlossener Winkel gegeben sind die dritte Seitenlänge bestimmen.



Satz: Der Kosinussatz ist eigentlich gleich dem Satz von Pythagoras nur für alle Winkel und nicht nur für rechtwinklige Dreiecke.

Es lassen sich folgende drei Gleichungen definieren. Die Herleitung findest du auch hier im Anhang. Studiere diese.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Anschließend muss man noch die Wurzel ziehen!

Es lassen sich nun folgende Umformungen der Gleichungen vornehmen:

$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Beispiel: Ein Dreieck hat die Seitenlängen b=6cm und c=9cm, welche den Winkel α =32° einschließen. Berechne die restlichen Größen.

Seitenlänge a: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) = 36 + 81 - 108\cos(32) = 25.41cm^2$

$a = \sqrt{25.41} = 5.04cm$

Winkel β: $\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0.65$

$\arccos(0.65) = 49.31°$

Winkel γ: 180°-32°-49.31°=98.69°

Versuche nun selber Aufgaben zum Sinus- und zum Kosinussatz zu lösen. Auf der nächsten Seite findest du eine Tabelle, in welcher immer drei Angaben gemacht werden und drei werden gesucht.

Aufgaben

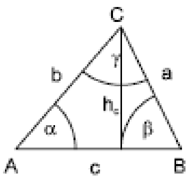
a	b	c	α	β	γ
7,5			45,76°	110,58°	
	8,22		39,07°		83,96°
15,83	12,41		75,59°		
3,74	4,18			31,72°	
	11,24	6,03	15,62°		
13	14	15			
	25,35		56,85°	77,75°	
32,91	36,68				76,47°
	24,35	13,6			30,28°
8,62			28,96°		105,21°
14,1		23,5		53,13°	
	65,36			44,63°	85,44°
	35,87	30,26		69,54°	
47,68	25,35	27,11			
4,42		7,04	30,30°		
17,27	14,98	10,75			
11,68	18,31				26,00°
48,29	36,48	20,23			
29,26			59,93°		86,86°
6,5		7,21		50,00°	

Lösungen

a	b	c	α	β	γ
7,5	9,8	4,2	45,76°	110,58°	23,65°
6,18	8,22	9,75	39,07°	56,97°	83,96°
15,83	12,41	13,39	75,59°	49,40°	55,01°
3,74	4,18	6,87	28,06°	31,72°	120,22°
5,67	11,24	6,03	15,62°	147,74°	16,64°
13	14	15	53,13°	59,49°	67,38°
21,72	25,35	18,47	56,85°	77,75°	45,40°
32,91	36,68	43,17	47,83°	55,70°	76,47°
26,88 15,18	24,35	13,6	85,19° 34,25°	64,53° 115,47°	30,28°
8,62	12,77	17,18	28,96°	45,83°	105,21°
14,1	18,8	23,5	36,87°	53,13°	90°
71,19	65,36	92,74	49,93°	44,63°	85,44°
32,55	35,87	30,26	58,23°	69,54°	52,22°
47,68	25,35	27,11	130,67°	23,78°	25,55°
4,42	8,71 3,45	7,04	30,30°	96,23° 23,17°	53,47° 126,53°
17,27	14,98	10,75	82,56°	59,33°	38,11°
11,68	18,31	9,34	33,24°	120,76°	26,00°
48,29	36,48	20,23	113,64°	43,79°	22,57°
29,26	18,52	33,76	59,93°	33,21°	86,86°
6,5	5,83	7,21	58,66°	50,00°	71,34°

Anhang: Herleitungen

(a) Sinussatz



Zeichnet man im allgemeinen Dreieck die Höhen auf die Seite c ein, so teilt diese Höhe das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Dann ergibt sich:

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \quad \text{und} \quad h_c = b \cdot \sin(\alpha) \qquad\qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \quad \text{und} \quad h_c = a \cdot \sin(\beta)$$

Es gilt also: $$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$$

Verfährt man ebenso mit den anderen Höhen, so folgt:

$$h_b = c \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\gamma)$$

$$h_a = b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\beta)$$

Die rechten Seiten kann man als Proportionen anschreiben:

$$\begin{aligned} a : \sin(\alpha) &= b : \sin(\beta) \\ b : \sin(\beta) &= c : \sin(\gamma) \\ c : \sin(\gamma) &= a : \sin(\alpha) \end{aligned} \qquad \text{bzw. nach weiterer Umformung} \qquad \begin{aligned} a : b &= \sin(\alpha) : \sin(\beta) \\ b : c &= \sin(\beta) : \sin(\gamma) \\ c : a &= \sin(\gamma) : \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Dies läßt sich aber auch als fortlaufende Proportion anschreiben: $$a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$$

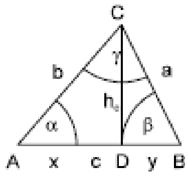
Sinussatz: Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich zueinander wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel: $$a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$$

Die folgende Schreibweise hat sich für die praktische Berechnung als zweckmäßig erwiesen:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \qquad \text{und daher die drei Gleichungen} \qquad \begin{aligned} \frac{a}{\sin(\alpha)} &= \frac{b}{\sin(\beta)} \\ \frac{b}{\sin(\beta)} &= \frac{c}{\sin(\gamma)} \\ \frac{c}{\sin(\gamma)} &= \frac{a}{\sin(\alpha)} \end{aligned}$$

(b) Kosinussatz

Die durch den Fußpunkt D der Höhe h_c gebildeten Abschnitte der Seite c sollen AD = x und DB = y heißen. Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ergibt sich dann:



$a^2 = h_c^2 + y^2$ und $b^2 = h_c^2 + x^2$ und daraus $h_c^2 = b^2 - x^2$

also weiters $a^2 = b^2 - x^2 + y^2$

und wegen $y = c - x$ folgt $a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

Im Dreieck ADC gilt zusätzlich $\cos(\alpha) = \frac{x}{b}$ und daher $x = b \cdot \cos(\alpha)$

Damit ergibt sich letztendlich $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

Berechnet man entsprechend für die anderen Seiten b und c, so erhält man:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Kosinussatz: Das Quadrat über der Länge einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt dieser Seitenlängen und dem Kosinuswert des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ $\quad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$