WF Mathematik: 1. Grundbegriffe der Geometrie

Geometrie setzt sich aus den beiden griechischen Wörtern „geo“ (Erde) und „metrein“ (messen) zusammen, bedeutet ursprünglich „Erdvermessen“. Alle Gegenstände unseres Universums sind dreidimensionale Körper. **Körper** werden durch Flächen begrenzt; **Flächen** stossen in Kanten aufeinander, welche durch gerade oder gekrümmte Linien gebildet werden; **Kanten** laufen in **Ecken** (= Punkte) zusammen.

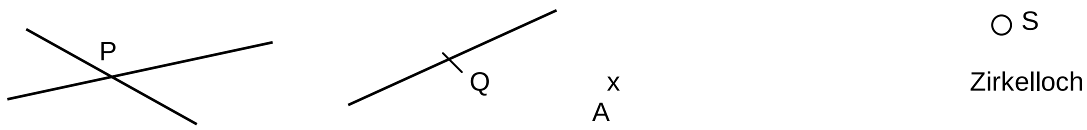
Die Bausteine unserer Geometrie sind Körper, Flächen, Linien und Punkte.

In der Geometrie beschäftigen wir uns mit Figuren, die aus diesen Bausteinen bestehen, wir können sie:

- untersuchen, messen, berechnen, prüfen
- darstellen, skizzieren, konstruieren, herstellen
- vergleichen, auf Gesetzmässigkeiten und Zusammenhänge untersuchen
- bewegen, abändern, vergrössern, verkleinern
- räumlich veranschaulichen und verdeutlichen
- als Grundlagen für viele Alltagssituationen herbeiziehen

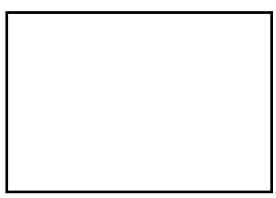
1. Punkte

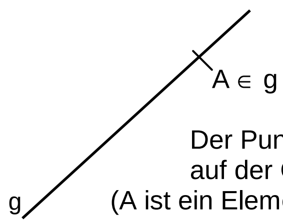
Dort wo sich **zwei Linien schneiden, ist ein Punkt**. Punkte werden mit Grossbuchstaben bezeichnet. Folgende Situationen sind gebräuchlich:



Punktmenge

Linien und Ebenen bestehen aus unendlich vielen Punkten, es sind also Punktmengen.



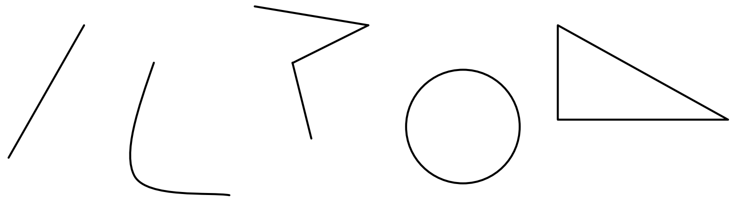


Der Punkt A liegt auf der Geraden g (A ist ein Element von g)

Vergleiche mit Zeitungsfotos (Raster)
Fernsehbild
Malereiepoche „Pointillismus“

2. Linien

Wenn sich ein Punkt fortbewegt, entsteht eine Linie. Linien können gerade (1), gekrümmt (2) oder gebrochen (3) sein, gleichzeitig offen (a) oder geschlossen (b).



Die wichtigsten geraden Linien

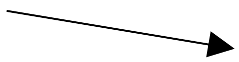
Gerade = gerade Linie, ohne Anfangs- und ohne Endpunkt, ohne Richtung

(AB) = g
zwei Grossbuchstaben in Klammern oder g, h, p, q, ...

Strecke = gerade Linie, mit Anfangs- und mit Endpunkt, ohne Richtung

AB = a
zwei Grossbuchstaben
oder a, b, c, d, e, r, s, ...

Vektor = gerade Linie, mit Anfangs- und mit Endpunkt, mit Richtung

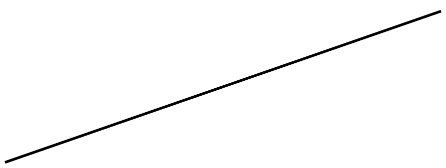


AB = v
zwei Grossbuchstaben mit Pfeil darauf
oder a, b, v, ...
(vergleiche mit einem Fluss)

Seltenere gerade Linien

Halbgerade = gerade Linie, einseitig begrenzt, ohne Richtung
Strahl = gerade Linie, einseitig begrenzt, mit Richtung (gerichtete Halbgerade)
Speer = gerade Linie, ohne Begrenzung, mit Richtung (gerichtete Gerade)

Mengenschreibweisen: erläutere mit Worten!



ˣ C

$A \in g$	$A \in a$
$B \in g$	$B \in a$
$C \notin g$	$C \notin a$
$A \in (AB)$	$A \in AB$
$D \in g$	$D \notin a$
$a \subset g$	$a = AB$
$a \subset (AB)$	$BD \not\subset AB$

$BD \subset (AB)$

3. Flächen, Ebene

Flächen sind uns nicht unbekannt: Tischfläche, Erdoberfläche, Dachfläche, Grundstückfläche, Wellblechfläche. Flächen können gekrümmt oder eben sein. **Flächen** sind allseitig **begrenzt**. Denken wir uns eine Fläche nach allen Seiten erweitert, sprechen wir von einer **Ebene**, diese ist **unbegrenzt**.

T = Tischfläche $\subset$ Ebene
a = Strecke = AB

$a \subset T$ (a ist eine Teilmenge der Fläche T)
$(AB) \not\subset T$ (!) aber $(AB) \subset E$

Die wichtigsten geometrischen Flächen

Dreieck — Quadrat — Rechteck

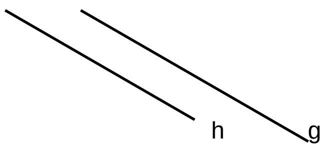
Drachenviereck — Vieleck (Fünfeck) — Kreis

Rhombus — Rhomboid — Trapez

Geradenpaare und Ebene

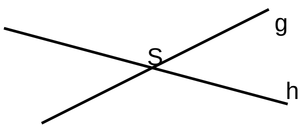
Zwei Geraden können verschieden zueinander stehen, auf einer oder zwei Ebenen:

parallel



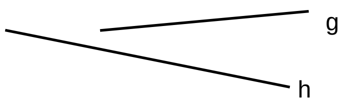
g und h sind parallel: $g \parallel h$
Sie liegen in der gleichen Ebene, haben aber keine Punkte gemeinsam.
Vergleiche: Strasse neben Eisenbahntrassee

schneidend



g und h schneiden sich im Punkt S: $g \cap h = \{S\}$
Beide Geraden liegen auf der gleichen Ebene.
Vergleiche: unbewachter Bahnübergang

windschief



g und h sind windschief: $g \cap h = \{\}$
Beide Geraden liegen nicht auf der gleichen Ebene und haben keinen Punkt gemeinsam.
Vergleiche: Eisenbahnunterführung

4. Erste geometrische Grundsätze

Durch **einen Punkt** kann man unendlich viele **Geraden** legen.

Eine **Gerade** ist durch **zwei Punkte** eindeutig bestimmt. Durch zwei Punkte kann man genau eine Gerade legen.

Durch **zwei Punkte** kann man unendlich viele **Linien** legen.

Zwei Geraden können sich höchstens in einem Punkt schneiden.

Durch **zwei Punkte** lassen sich unendlich viele **Ebenen** legen. (Türscharnier).

Durch **drei Punkte**, die nicht auf einer Geraden liegen, lässt sich nur eine **Ebene** legen; eine Ebene ist durch drei Punkte eindeutig bestimmt (Türe im Schloss).

<u>Allgemeines zu den Konstruktionen:</u>

Gegebene Grössen:	blau
Konstruktion:	mit Bleistift (nie ausradieren)
Gesuchte Grössen:	rot

5. Winkel und Winkelpaare

Definition

Unter einem Winkel verstehen wir zwei Halbgeraden a und b mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S. a und b heissen Schenkel, S wird Scheitelpunkt genannt.

Bezeichnungen

Es werden griechische Buchstaben verwendet: alpha, beta, gamma, delta, etc.

Einteilung der Winkel (α = ?)

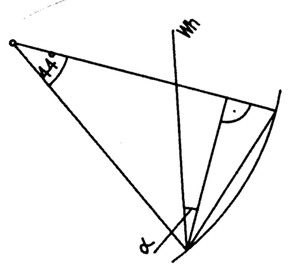
Nullwinkel	………………..	spitzer Winkel	………………..
rechter Winkel	………………..	stumpfer Winkel	………………..
gestreckter Winkel	………………..	überstumpfer Winkel	………………..
Vollwinkel	………………..		

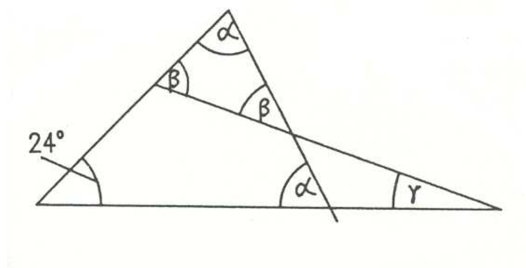
Winkelpaare

1. Nebenwinkel messen zusammen 180°.

2. Scheitelwinkel sind gleich gross.

Berechnungsaufgaben

1. 

2. 

6. Ortslinien als Punktmengen

Ortssatz 1
Die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt M die Entfernung r haben, bildet die Kreislinie um M mit dem Radius r.

Ortssatz 2
Die Menge aller Punkte, die von zwei Punkten A und B die gleiche Entfernung haben, bildet die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Ortssatz 3
Die Menge aller Punkte, die von einer Geraden g den gegebenen Abstand a = 2cm haben, bilden das Parallelenpaar zur Geraden im gegebenen Abstand.

Ortssatz 4
Die Menge aller Punkte, die von zwei Parallelen den gleichen Abstand haben, bildet die Mittelparallele der beiden Parallelen.

Ortssatz 5
Die Menge aller Punkte, die von den Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand haben, bildet die Winkelhalbierende.

Ortssatz 6
Alle Punkte, die von einem festen Punkt M höchstens die Entfernung r haben, bilden die Kreisfläche um M mit der Entfernung r als Radius. Die Randpunkte des Kreises sind eingeschlossen.

Ortssatz 7
Alle Punkte, die von einem festen Punkt M mindestens die Entfernung r haben, bilden die Kreisfläche um M mit der Entfernung r als Radius. Die Randpunkte des Kreises sind eingeschlossen.

Aufgabenbeispiele

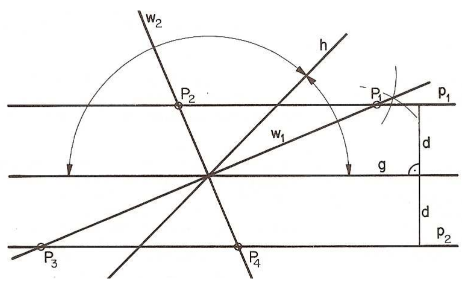
1. Zwei parallele Geraden g und h werden von einer Geraden s unter einem Winkel von 60° geschnitten. Konstruiere Punkte, die von allen drei Geraden die gleiche Entfernung haben.

2. Zeichne drei Punkte A, B und C. Wo befinden sich die Punkte, die von den drei Punkten die gleiche Entfernung haben.

3. Zeichne drei sich schneidende Geraden a, b und c und konstruiere alle Punkte, die von den drei Geraden die gleiche Entfernung haben.

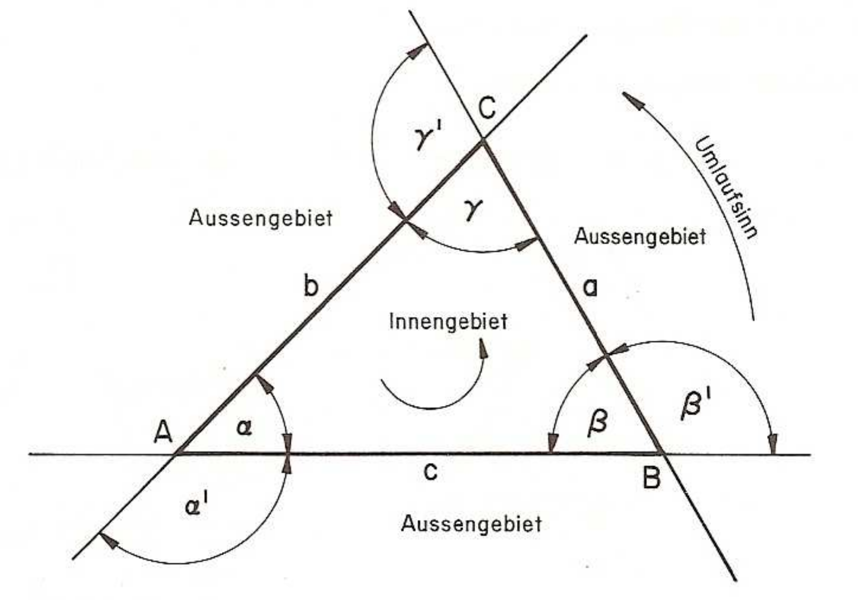
4. Ein Ortssatz ist durch die folgende Mengenschreibweise gegeben: M = { P I PA = PB } !
Gib den Ortssatz in Worten an und zeichne die Ortslinie!

5. Nenne die Ortssätze, die bei der folgenden Konstruktion von P_1, P_2, P_3 und P_4 verwenet worden sind:

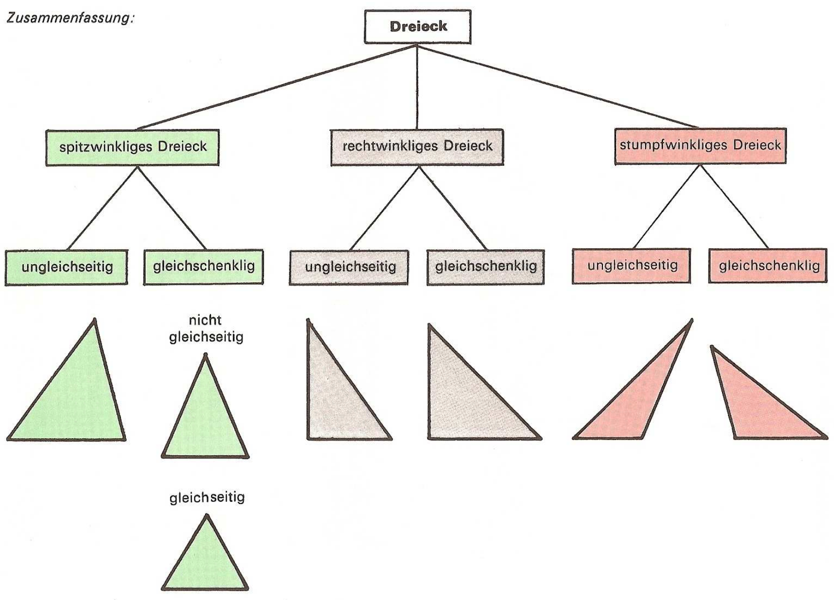


7. Das Dreieck

Definition und Bezeichnungen



Dreiecksarten: Eine Übersicht



Besondere Linie und Punkte im Dreieck

Satz 1:
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich im Punkt M. Dieser Punkt hat von den drei Ecken des Dreiecks die gleiche Entfernung. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.

Satz 2:
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Punkt W. Dieser Punkt hat von den drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand. Er ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreicks.

Satz 3:
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt H. Dieser Punkt H wird als Höhenschnittpunkt bezeichnet.

Satz 4:
Die Verbindungsstrecke vom Mittelpunkt einer Dreiecksseite zur gegenüberliegenden Ecke wird als Seitenhalbierende oder Schwerlinie bezeichnet. Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks scheiden sich in einem Punkt S. Dieser Punkt wird als Schwerpunkt bezeichnet. Er teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2:1.

Winkelsätze im Dreieck

Satz 1:
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

Satz 2:
Die Summe der Aussenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.

Satz 3:
In jedem Dreieck ist ein Aussenwinkel gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.

Satz 4:
Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel 60°.

Satz 5: „Satz des Thales“ (Thaleskreis)
Liegen die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, so ist das Dreieck rechtwinklig. Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

8. Die vier Kongruenzsätze von Dreiecken

1. Kongruenzsatz:
Dreiecke sind kongruent (=deckungsgleich), wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen (SSS).

2. Kongruenzsatz:
Dreiecke sind kongruent (=deckungsgleich), wenn sie in den zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS).

3. Kongruenzsatz:
Dreiecke sind kongruent (=deckungsgleich), wenn sie in einer Seite und in zwei Winkeln übereinstimmen (WSW, SWW).

4. Kongruenzsatz:
Dreiecke sind kongruent (=deckungsgleich), wenn sie in zwei Seiten und im Winkel, der der grösseren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen (SSW_g).

9. Dreieckskonstruktionen

<u>Allgemeines</u>

Die Konstruktion eines Dreiecks sollte in 4 Schritten vorgenommen werden:

1. Gegebene Grössen zeichnen (damit sie in die Konstruktion übertragen werden können).
2. Skizze machen: Nicht zu klein, Eigenschaften der Figur sollten sichtbar sein, gegebene Grössen mit Farbe (blau) eintragen! Vorgehen analysieren.
3. Konstruktion ausführen, am Ende Lösung rot hervorheben.
4. Konstruktionsbericht mit Ziel: Mengenschreibweise, nummeriert, eindeutig!

<u>Aufgaben</u>

1.	Gegeben: a = 32 mm ; b = 45 mm ; c = 76 mm	Gesucht: Dreieck ABC
2.	Gegeben: a = 5,6 cm ; b = 6,4 cm ; c = 2,9 cm	Gesucht: Dreieck ABC
3.	Gegeben: a = 5 cm ; $\beta = 60^0$; $\gamma = 85^0$	Gesucht: Dreieck ABC
4.	Gegeben: c = 60 mm ; $\alpha = 45^0$; $\beta = 75^0$	Gesucht: Dreieck ABC
5.	Gegeben: c = 7 cm ; b = 6 cm ; $\alpha = 70^0$	Gesucht: Dreieck ABC
6.	Gegeben: $\beta = 120^0$; a = 60 mm ; c = 90 mm	Gesucht: Dreieck ABC
7.	Gegeben: c = 6 cm, a = 5 cm und $\beta = 65^o$	Gesucht: Dreieck ABC
8.	Gegeben: a = 4,0 cm; c = 4,5 cm; h_c = 3,5 cm	Gesucht: Dreieck ABC
9.	Gegeben: h_c = 4,2 cm; b = 4,4 cm; $\gamma = 40°$	Gesucht: Dreieck ABC
10.	Gegeben: w_α = 6,2 cm, $\alpha = 40°$; $\gamma = 65°$	Gesucht: Dreieck ABC
11.	Gegeben: h_c = 3,5 cm; s_c = 3,8 cm; a = 5,6 cm	Gesucht: Dreieck ABC
12.	Gegeben: a = 3,0 cm; $\gamma = 70°$; s_b = 3,4 cm	Gesucht: Dreieck ABC

Musterbeispiele

1. Gegeben sind: a = 6 cm, α = 90° und β = 60º! Konstruiere die Lösung in 4 Schritten!

a. Gegebene Grössen

b. Skizze! *Beachte: Ohne saubere und richtige Skizze ist keine korrekte Lösung möglich!!!*

c. Konstruktion

d. Konstruktionsbericht!

……………………………………….

……………………………………….

……………………………………….

……………………………………….

……………………………………….

……………………………………….

……………………………………….

2. Gegeben sind: $h_a = 7$ cm, $\chi = 68°$ und $s_b = 4.8$ cm! Konstruiere die Lösung in 4 Schritten!

a. Gegebene Grössen

b. Skizze! *Beachte: Ohne saubere und richtige Skizze ist keine korrekte Lösung möglich!!!*

c. Konstruktion

d. Konstruktionsbericht!

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

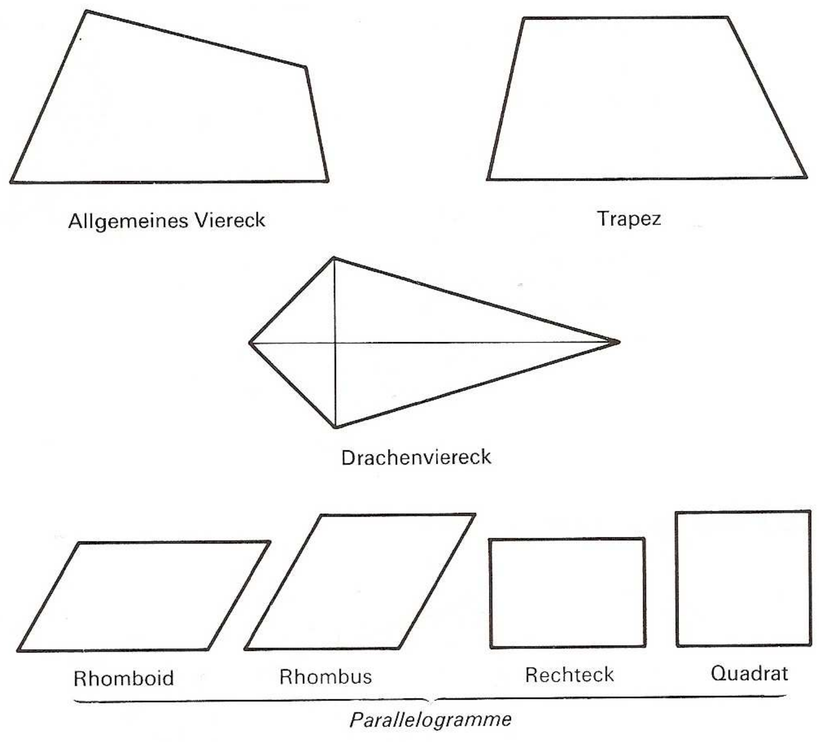
……………………………………………

……………………………………………

10. Vierecke

In diesem Skript werden nur kurz die verschiedenen Vierecksarten vorgestellt:

Vierecksarten



11. Kreis

Bezeichnungen am Kreis

Strecken: ………………………
………………………
………………………

Geraden: ………………………
………………………
………………………
………………………

Bemerkung: Das Thema Flächenberechnungen behandeln wir nicht mit diesem Skript. Dies wird im Mathematik-Unterricht nochmals repetiert.